

ANALIZA STATYSTYCZNA DANYCH W LABORATORIUM PODSTAW FIZYKI

dr inż. Jakub Grotel

SPIS TREŚCI

WSTĘP.....	3
1. PODSTAWOWE POJĘCIA	4
2. JEDNOSTKI ORAZ KONWERSJA JEDNOSTEK	5
3. OCENA NIEPEWNOŚCI POMIARU	7
3.1. POMIARY BEZPOŚREDNIE	8
3.2. POMIARY POŚREDNIE	10
3.3. ZAPIS WYNIKÓW POMIARU	12
3.4. GRAFICZNA REPREZENTACJA WYNIKÓW	13
4. ROZKŁAD GAUSSA	14
4.1. TEST SHAPIRO-WILKA.....	14
4.2. ROZKŁAD NORMALNY	15
5. ROZKŁAD POISSONA	19
6. HISTOGRAM.....	20
7. REGRESJA LINIOWA	24
7.1. METODA NAJMNIEJSZYCH KWADRATÓW	24
7.2. TEST ZGODNOŚCI χ^2 (CHI KWADRAT).....	26
8. PRZYGOTOWANIE DO ZAJĘĆ	28
9. BIBLIOGRAFIA	28
ZAŁĄCZNIK 1 Pochodne.....	29
ZAŁĄCZNIK 2 Metoda różniczki zupełnej.....	30
ZAŁĄCZNIK 3 Tablica wartości α dla testu Shapiro-Wilka.....	31
ZAŁĄCZNIK 4 Tablica rozkładu W_T dla testu Shapiro-Wilka.....	32
ZAŁĄCZNIK 5 Dystrybuenta standardowego rozkładu normalnego	33
ZAŁĄCZNIK 6 Wartość funkcji rozkładu prawdopodobieństwa Poissona	34
ZAŁĄCZNIK 7 Wartość χ^2_{kryt} dla istotności α i liczby stopni swobody DF	36
ZAŁĄCZNIK 8 Wzór protokołu pomiarowego	37
ZAŁĄCZNIK 9 Wzór sprawozdania	38

~~ERRARE HUMANUM EST~~

WSTĘP

Niniejszy skrypt przeznaczony jest do celów dydaktycznych jako materiał pomocniczy do zajęć laboratoryjnych dla studentów Politechniki Lubelskiej. Celem skryptu jest zapoznanie studentów z podstawami statystycznej analizy danych, obowiązującymi normami oraz sposobem oceny i zapisu niepewności pomiaru. Autor skryptu zakłada brak uprzedniej wiedzy czytelnika o poruszanych zagadnieniach.

Intencją autora jest zapoznanie studentów z metodami statystycznymi na wczesnym etapie kształcenia akademickiego. Nacisk położony jest na praktyczne zastosowanie przedstawionych informacji poprzez aktywny udział w zajęciach laboratoryjnych i późniejszą interpretację danych pomiarowych. Z tego względu zawarta w skrypcie teoria została zredukowana do niezbędnego minimum, w wielu miejscach uproszczona przy jednoczesnym zachowaniu naukowego rygoru.

Skrypt składa się z dziewięciu rozdziałów. Rozdział I pełni rolę słownika, w którym zestawiono najważniejsze pojęcia używane w treści skryptu. Rozdział II przedstawia krótką charakterystykę układu SI oraz opisuje metodę konwersji jednostek. Rozdział III dotyczy sposobów oceny i zapisu niepewności pomiaru na podstawie obowiązujących norm międzynarodowych. Rozdziały IV–VII poświęcone są wybranym metodom statystycznej analizy danych. Są to kolejno: rozkład Gaussa, rozkład Poissona, histogram oraz regresja liniowa. Rozdział VIII dotyczy wymagań odnośnie przygotowania się studentów do zajęć laboratoryjnych oraz opisu ich samego przebiegu. W Rozdziale IX przedstawiono bibliografię. Do skryptu dołączono dziewięć załączników, które stanowią uzupełnienie tekstu głównego.

Niniejszy skrypt został zredagowany w sposób umożliwiający jego dalszą rozbudowę w miarę zwiększania się dostępnych ćwiczeń laboratoryjnych oraz zmieniającego się zapotrzebowania na określone zagadnienia. Informacje zawarte w tekście mają wartość uniwersalną, ich przydatność nie ogranicza się do jednego laboratorium. Z tego powodu skrypt ma potencjał do bycia łatwo dostępnym i przyswajalnym materiałem referencyjnym w dalszym toku kształcenia studentów.

1. PODSTAWOWE POJĘCIA

Poniżej przedstawiono najważniejsze pojęcia wykorzystywane w niniejszym skrypcie dotyczące analizy statystycznej oraz oceny niepewności pomiaru:

Pomiar – zbiór czynności mających na celu określenie wartości wielkości mierzonej.

Błąd – zjawisko zarówno jakościowe jak i ilościowe polegające na występowaniu nieznanej różnicy między wartością zmierzoną a umowną wartością prawdziwą.

Niepewność pomiaru – parametr, związany z wynikiem pomiaru, charakteryzujący rozrzut wartości, które można w uzasadniony sposób przypisać wielkości mierzonej.

Niepewność standardowa – niepewność wyniku pomiaru wyrażona w formie odchylenia standardowego. Wyróżnia się niepewność standardową **typu A** (opartą na dowolnej metodzie analizy statystycznej) oraz **typu B** (opartą na subiektywnym osądzie eksperymentatora).

Obserwacja statystyczna – proces zbierania danych liczbowych zgodnie z przyjętymi definicjami, metodami i technikami.

Populacja (populacja generalna) – zbiór elementów posiadających wspólną cechę lub cechy ilościowe lub jakościowe będący przedmiotem badania.

Próba – podzbiór populacji generalnej wybrany w określony sposób.

Zmienna – wielkość (cecha), która może przyjmować wartości z określonego zbioru.

Zmienna zależna – cecha lub wartość, która jest obiektem badania i podlega ocenie lub pomiarowi w celu zrozumienia jej zmiany lub związku z innymi zmiennymi (niezależnymi) w badaniu.

Zmienna niezależna – cecha lub wartość, która charakteryzuje zbiór elementów objętych badaniem i w kontekście danego eksperymentu nie zależy od innych czynników.

Zmienna losowa – zmienna, która w wyniku pewnego doświadczenia przyjmuje wartość z określonego zbioru z pewnym prawdopodobieństwem. Wyróżnia się zmienną losową **ciągłą** (przyjmuje dowolne wartości z danego przedziału) oraz **dyskretną** (przyjmuje wyłącznie ściśle określone wartości).

Poziom istotności (istotność statystyczna) – ustalane przez badacza maksymalne dopuszczalne prawdopodobieństwo odrzucenia hipotezy zerowej, mimo że jest ona prawdziwa.

Hipoteza – twierdzenie wynikające z pytania badawczego, postawione w celu jego potwierdzenia lub odrzucenia. Wyróżnia się **hipotezę zerową** (podlega weryfikacji za pomocą testu statystycznego) oraz **hipotezę alternatywną** (zaprzeczenie hipotezy zerowej, przyjmowana, gdy ta pierwsza jest nieprawdziwa).

Wartość oczekiwana – średnia wartość danej cechy w całej populacji lub wartość średnia wyniku zdarzenia (teoretyczna średnia wartość wyniku losowania).

Odchylenie standardowe – określa miarę rozrzutu wartości badanej wielkości wokół wartości średniej. Wyróżnia się odchylenie standardowe z populacji oraz z próby, która reprezentuje większą populację (ten drugi wariant dotyczy pomiarów podczas zajęć laboratoryjnych).

Wariancja – miara rozproszenia danych wokół średniej arytmetycznej. Jest to kwadrat z odchylenia standardowego.

2. JEDNOSTKI ORAZ KONWERSJA JEDNOSTEK

Międzynarodowy Układ Jednostek Miar (fr. *Système international d'unités* – SI) jest najczęściej wykorzystywanym układem jednostek w nauce i technice na całym świecie (wyjątek stanowi imperialny system miar wciąż stosowany w krajach anglosaskich czy starsze układy, np. CGS). Historia SI sięga końcówki XVIII wieku. W 1791 roku uchwałą Zgromadzenia Francuskiego ustanowiono definicję metra jako podstawowej jednostki długości. W 1799 wykonano i zdeponowano w Paryżu wzorzec metra oraz kilograma. Układ SI jaki znany jest dzisiaj został ustanowiony na posiedzeniu XI Generalnej Konferencji Miar dopiero w 1960 roku i z niewielkimi zmianami funkcjonuje do chwili obecnej. W Polsce został on wprowadzony ustawą w 1966 roku. Polską jednostką administracji rządowej odpowiedzialną za sprawy miar i probiernictwa jest Główny Urząd Miar (<https://www.gum.gov.pl>).

Układ Jednostek Miar SI obejmuje siedem podstawowych jednostek miar: sekundę, metr, kilogram, amper, kelwin, kandelę oraz mol, które reprezentują podstawowe wielkości fizyczne. Wielkości te zdefiniowano w sposób zapewniający bardzo wysoką precyzję oraz stabilność odtwarzania ich wartości poprzez wykorzystanie niezmiennych stałych fizycznych lub technicznych. W skrócie definicje poszczególnych wielkości jawią się następująco:

1. Sekunda (s) – wielkość opisana za pomocą stałej technicznej zwanej częstotliwością cezową. Jest to czas równy 9192631770 okresom promieniowania odpowiadającym przejściu pomiędzy dwoma nadsubtelnymi poziomami niezaburzonego stanu podstawowego atomu cezu Cs-133;
2. Metr (m) – wielkość opisana za pomocą prędkości światła oraz częstotliwości cezowej. Jest to droga przebyta przez światło w próżni w czasie równym 299792458^{-1} s;
3. Kilogram (kg) – wielkość opisana za pomocą stałej Plancka, częstotliwości cezowej oraz prędkości światła. Do 2019 wzorcem kilograma był fizyczny obiekt w postaci walca wykonanego ze stopu platyny i irydu, przechowywany w Międzynarodowym Biurze Miar i Wag w podparyskim Sèvres;
4. Amper (A) – wielkość opisana za pomocą wartości ładunku elementarnego oraz częstotliwości cezowej. Jest to prąd elektryczny odpowiadający przepływowi $1/(1,602176634 \cdot 10^{-19})$ ładunków elementarnych na sekundę;
5. Kelwin (K) – wielkość opisana za pomocą stałej Boltzmanna, stałej Plancka, częstotliwości cezowej. Jest to zmiana temperatury termodynamicznej równa zmianie ciepła o $1,380649 \cdot 10^{-23}$ J;
6. Kandela (cd) – wielkość opisana za pomocą stałej technicznej światłości promieniowania monochromatycznego o częstotliwości $540 \cdot 10^{12}$ Hz, stałej Plancka i częstotliwości cezowej. Jest to światłość źródła emitującego promieniowanie o częstotliwości $540 \cdot 10^{12}$ Hz w danym kierunku przy natężeniu promieniowania równym 683^{-1} Wsr⁻¹ w tym samym kierunku;
7. Mol – ilość substancji zawierająca $6,02214076 \cdot 10^{23}$ (stała Avogadra) określonych obiektów elementarnych.

Jednostki pochodne w układzie SI stanowią iloczyny potęg jednostek podstawowych, np. gęstość wyrażona w kg·m⁻³. Dodatkowo dziesiętne wielokrotności i podwielokrotności

jednostek podstawowych i pochodnych można wyrażać używając odpowiednich przedrostków. Spis najczęściej wykorzystywanych przedrostków przedstawia Tabela 1.

Tabela 1 Przedrostki dla jednostek podstawowych i pochodnych w układzie SI

Przedrostek	Oznaczenie	Czynnik
Peta	P	$10^{15} = 1000000000000000$
Tera	T	$10^{12} = 1000000000000$
Giga	G	$10^9 = 1000000000$
Mega	M	$10^6 = 1000000$
Kilo	k	$10^3 = 1000$
Hekto	h	$10^2 = 100$
Deka	da	$10^1 = 10$
		$10^0 = 1$
Decy	d	$10^{-1} = 0,1$
Centy	c	$10^{-2} = 0,01$
Mili	m	$10^{-3} = 0,001$
Mikro	μ	$10^{-6} = 0,000001$
Nano	n	$10^{-9} = 0,000000001$
Piko	p	$10^{-12} = 0,000000000001$
Femto	f	$10^{-15} = 0,000000000000001$

W celu przeliczenia (konwersji) jednostek z jednej postaci do innej konieczna jest znajomość jakiejś zależności między nimi. Może być to funkcja, tak jak w przypadku skali temperaturowej Celsjusza i Kelwina. Najczęściej jednak do obliczeń wystarczy informacja o wybranej równowartości.

Przykład 2.1:

$$5 \text{ km} \rightarrow \text{m}$$

Wiedząc, że:

$$1 \text{ km} = 1000 \text{ m}$$

Dzielimy obie strony równania przez wyraz po lewej lub prawej stronie:

$$1000 \text{ m} = 1 \text{ km} \quad | : 1 \text{ km} \rightarrow \frac{1000 \text{ m}}{1 \text{ km}} = 1$$

Taki ułamek ma wartość równą 1 również po zamianie licznika z mianownikiem i jest przelicznikiem jednostkowym. Kolejnym etapem obliczeń jest przemnożenie zadanej wartości przez taką postać przelicznika, która wyeliminuje pierwotną jednostkę.

Zatem:

$$5 \text{ km} = 5 \text{ km} \cdot \left(\frac{1000 \text{ m}}{1 \text{ km}} \right) = 5000 \text{ m}$$

Przykład 2.2:

$$114,6^{\circ} \rightarrow \text{rad}$$

Wiedząc, że:

$$\pi \text{ rad} = 180^{\circ}$$

Zatem:

$$114,6^{\circ} = 114,6^{\circ} \cdot \left(\frac{\pi \text{ rad}}{180^{\circ}} \right) = 2 \text{ rad}$$

Przykład 2.3:

$$20 \text{ hPa} \rightarrow \text{mPa}$$

Na podstawie informacji zawartych w Tabeli 1:

$$1 \text{ hPa} = 10^2 \text{ Pa}$$

$$1 \text{ mPa} = 10^{-3} \text{ Pa}$$

Dzieląc powyższe równania stronami otrzymujemy:

$$\frac{1 \text{ hPa}}{1 \text{ mPa}} = \frac{10^2 \text{ Pa}}{10^{-3} \text{ Pa}} = 10^5$$

Dzieląc ponownie, aby sprowadzić wynik równania do jedności, otrzymujemy odpowiedni przelicznik:

$$\frac{1 \text{ hPa}}{1 \text{ mPa}} = 10^5 | : 10^5 \rightarrow \frac{1 \text{ hPa}}{10^5 \text{ mPa}} = 1$$

Zatem:

$$20 \text{ hPa} = 20 \text{ hPa} \cdot \left(\frac{10^5 \text{ mPa}}{1 \text{ hPa}} \right) = 20 \cdot 10^5 \text{ mPa} = 2 \cdot 10^6 \text{ mPa}$$

Przykład 2.4:

$$18 \frac{\text{km}}{\text{h}} \rightarrow \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Możliwa jest również wielostopniowa konwersja jednostek w jednym równaniu:

$$18 \frac{\text{km}}{\text{h}} = 18 \frac{\cancel{\text{km}}}{\cancel{\text{h}}} \cdot \left(\frac{1000 \text{ m}}{1 \cancel{\text{km}}} \right) \cdot \left(\frac{1 \cancel{\text{h}}}{3600 \text{ s}} \right) = \frac{18000 \text{ m}}{3600 \text{ s}} = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

3. OCENA NIEPEWNOŚCI POMIARU

Celem zajęć laboratoryjnych jest nie tylko przeprowadzenie doświadczenia prowadzącego do wyznaczenia wielkości szukanej, ale również ilościowego określenia rozrzutu otrzymanych wartości, tj. **niepewności pomiaru**. Kolejne wyniki różnią się od siebie i/lub od wartości znanej (prawdziwej). Jest to spowodowane występowaniem zjawiska błędu pomiarowego. **Błąd** jako nieznaną różnicą między wartością zmierzoną a umowną wartością

prawdziwą posiada wiele źródeł, a sam błąd dzieli się na błąd przypadkowy, systematyczny oraz grubo. W trakcie pomiarów można zazwyczaj spotkać się z przynajmniej dwoma pierwszymi rodzajami błędu jednocześnie pochodzącymi z kilku różnych źródeł.

Błąd przypadkowy związany jest ze stochastycznym (losowym) charakterem procesów fizycznych, zarówno w czasie jak i przestrzeni. Przykładem takiego procesu jest rozpad promieniotwórczy. Wpływ błędu jest różny dla kolejnych pomiarów i może być zredukowany poprzez zwiększenie liczby wszystkich obserwacji.

Błąd systematyczny (nielosowy) oddziałuje na każdy kolejny pomiar w sposób stały (wartość oraz znak przesunięcia) lub według określonej zależności. W odróżnieniu od błędu przypadkowego jest przewidywalny. Źródłem błędu jest nieprawidłowe wyzerowanie lub kalibracja przyrządu pomiarowego czy nieodpowiednio dobrana metoda pomiarowa. Wpływ błędu można kompensować stosując odpowiednią poprawkę.

Błąd grubo (pomyłka) występuje w przypadku, gdy zmierzona wartość znacząco odbiega od reszty wyników przy zachowaniu tych samych warunków pomiaru. Źródłem błędu grubego może być awaria lub nieprawidłowy odczyt/zapis wyniku z przyrządu pomiarowego. Co najważniejsze, taki wynik nie jest brany pod uwagę w dalszej analizie danych.

W 1995 roku Międzynarodowa Organizacja Normalizacyjna (ang. *International Standardization Organization – ISO*) wydała dokument „Guide to the expression of uncertainty in measurement” zobowiązujący kraje, w tym Polskę, to stosowania odpowiedniej normy przy obliczaniu i zapisie niepewności pomiaru. Przewodnik ten systematyzuje terminologię wykorzystywaną przy ocenie niepewności pomiaru oraz określa rodzaje niepewności i sposoby ich wyznaczania. Norma ISO zastępuje starsze metody oceny niepewności pomiaru, jak np. wciąż wykorzystywana do celów dydaktycznych metoda różniczki zupełnej (Załącznik 1 zawiera podsumowanie najważniejszych informacji dotyczących obliczania pochodnych, a Załącznik 2 opisuje samą metodę różniczkowania). Polska wersja przewodnika (wraz z późniejszymi zmianami), będąca tłumaczeniem międzynarodowego dokumentu **JCGM 100:2008**, dostępna jest do pobrania na stronie Głównego Urzędu Miar. Niniejszy skrypt stosuje się do przyjętej normy ISO i przybliża najważniejsze zagadnienia zawarte w przewodniku.

3.1. POMIARY BEZPOŚREDNIE

Pomiar bezpośredni to taki, w którym wielkość fizyczna mierzona jest bezpośrednio za pomocą jednego przyrządu, np. pomiar czasu za pomocą stopera. W zależności od charakteru wykonywanych pomiarów i sposobu opracowania wyników, wyróżnia się **niepewność standardową typu A oraz typu B**. Niepewność typu A oparta jest na dowolnej, prawidłowej metodzie statystycznej analizy danych (np. regresji liniowej). Niepewność typu B polega na subiektywnym szacowaniu niepewności pomiaru przez eksperymentatora na podstawie dostępnych danych (np. karta katalogowa miernika), wiedzy i doświadczenia. Wykorzystywane są tu metody inne niż analiza statystyczna stosowana w niepewności typu A. Należy zaznaczyć, iż możliwe jest jednoczesne występowanie obydwu typów niepewności dla określonej serii pomiarów.

NIEPEWNOŚĆ STANDARDOWA TYPU A:

Średnia arytmetyczna:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n x_i, \quad (1)$$

gdzie: n – liczba wszystkich pomiarów (obserwacji).

Odchylenie standardowe rozkładu (miara szerokości rozkładu, tj. rozrzut wartości zmiennej losowej wokół średniej):

$$u(x) = \sqrt{s_x^2} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \quad (2)$$

Powyższy wzór jest tożsamy ze wzorem na odchylenie standardowe z próby. Do obliczeń odchylenia standardowego z populacji należy zastąpić mianownik ułamka przez liczbę n .

Odchylenie standardowe wielkości średniej (ang. *standard error of the mean* – miara niepewności wartości średniej, tj. rozrzut średniej wartości wokół wartości oczekiwanej):

$$u(x) = \sqrt{s_{\bar{x}}^2} = \frac{s_x}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{1}{n \cdot (n-1)} \cdot \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \quad (3)$$

NIEPEWNOŚĆ STANDARDOWA TYPU B:

Odchylenie standardowe rozkładu jednostajnego (typ rozkładu, w którym prawdopodobieństwo otrzymania wyniku w określonym przedziale wartości jest stałe):

$$u(x) = \frac{\Delta x}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{(\Delta x)^2}{3}} \quad (4)$$

gdzie: Δx – niepewność graniczna (niepewność wzorcowania), tj. wartość określana na podstawie danych podanych przez producenta urządzenia lub wartość odpowiadająca pojedynczej działce elementarnej przyrządu pomiarowego.

W przypadku urządzeń do pomiaru wielkości elektrycznych w laboratorium, niepewność graniczną Δx wyznacza się z określonych wzorów.

Dla mierników cyfrowych (multimetrów):

$$\Delta x = \frac{k \cdot x}{100} + c \cdot x_0, \quad (5)$$

gdzie: k – klasa miernika (%) dla wybranego zakresu pomiarowego, x – wartość zmierzona (zapisać wszystkie miejsca dziesiętne), c – mnożnik podany przez producenta, x_0 – rozdzielczość, tj. maksymalna dokładność odczytu związana z rozszerzeniem dziesiętnym wyniku.

Przykład 3.1:

Zmierzono za pomocą amperomierza natężenie prądu elektrycznego $I = 0,573$ mA. W karcie katalogowej miernika znajduje się informacja o dokładności (ang. *accuracy*): $\pm(0,5\% + 3)$. Jaka jest niepewność graniczna miernika?

Na podstawie odczytanej wartości natężenia prądu widać, że rozdzielczość miernika wynosi 0,001 mA (możliwość odczytu do trzeciego miejsca dziesiętnego). Z danych katalogowych wynika, że klasa miernika to 0,5% a 3 to liczba zliczeń związanych z niepewnością wyświetlanej wartości pomiaru. Zatem niepewność graniczna wynosi:

$$\Delta x = \frac{0,5\% \cdot 0,573 \text{ mA}}{100\%} + 3 \cdot 0,001 \text{ mA} = 0,0059 \text{ mA}$$

Dla urządzeń dekadowych:

$$\Delta x = \sum_{i=1}^n \frac{k_i \cdot z_i}{100} + x_0, \quad (6)$$

gdzie: n – numer najwyższej użytej dekady, k_i – klasa i -tej dekady (%), z_i – zakres i -tej dekady, x_0 – rozdzielczość, tj. najmniejsza wartość nastawy na urządzeniu dekadowym.

Inną przyczyną niepewności typu B jest niepewność eksperymentatora Δx_E , związana przykładowo z różnymi uwarunkowaniami biologicznymi osoby, jak np. czas reakcji. Wartość niepewności szacowana jest indywidualnie, jednak zazwyczaj jako minimalną wartość przyjmuje się $\Delta x_E = 0,5\Delta x$. Niepewność eksperymentatora może w niektórych sytuacjach kilkakrotnie przekraczać wartość niepewności granicznej. W przypadku występowania kilku źródeł niepewności typu B dodaje się je zgodnie z prawem propagacji niepewności:

$$u(x) = \sqrt{\frac{(\Delta x)^2}{3} + \frac{(\Delta x_E)^2}{3}} \quad (7)$$

Jeżeli dodatkowo występuje również niepewność typu A, **niepewność standardowa (całkowita)** przyjmuje postać:

$$u(x) = \sqrt{s_{\bar{x}}^2 + \frac{(\Delta x)^2}{3} + \frac{(\Delta x_E)^2}{3}} \quad (8)$$

3.2. POMIARY POŚREDNIE

Pomiar pośredni to taki, w którym wyznaczana wielkość y jest funkcją innych wielkości (zmiennych niezależnych) $y = f(a, b, c, \dots, z)$ mierzonych bezpośrednio za pomocą różnych przyrządów pomiarowych. Każdą wielkość cechuje inna niepewność standardowa typu A lub B: $u(a), u(b), u(c), \dots, u(z)$. **Niepewność złożona** wielkości y przyjmuje postać:

$$u(y) = \sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial a}\right)^2 \cdot u^2(a) + \left(\frac{\partial y}{\partial b}\right)^2 \cdot u^2(b) + \dots + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2 \cdot u^2(z)}, \quad (9a)$$

gdzie: $\frac{\partial y}{\partial a}$ – pochodna funkcji y po zmiennej a .

Niepewność złożoną można zapisać w uproszczonej postaci:

$$u(y) = \sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial a} \cdot u(a)\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial b} \cdot u(b)\right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial y}{\partial z} \cdot u(z)\right)^2} \quad (9b)$$

Gdy dane pomiary zostały wykonane wielokrotnie, wynikiem końcowym (podsumowującym) będzie średnia wartość funkcji $y = f(a, b, c, \dots, z)$ oraz niepewności $u(y)$.

W przypadku niepewności standardowej wartość rzeczywista znajduje się w przedziale $(\bar{x} - u(x), \bar{x} + u(x))$ z prawdopodobieństwem 68% (niepewność typu A) lub z prawdopodobieństwem 58% (niepewność typu B). W celu łatwiejszego porównania wyników pomiarów, ustalania norm przemysłowych stosuje się **niepewność rozszerzoną** U . Jest to zwiększona wartość niepewności standardowej:

$$U(x) = k \cdot u(x), \quad (10)$$

gdzie: k – współczynnik rozszerzenia, zazwyczaj $k = 2$ lub 3 .

Dla $k = 2$ wartość rzeczywista zawiera się w przedziale z prawdopodobieństwem 95,5% (niepewność typu A) lub prawdopodobieństwem 100% (niepewność typu B).

Przykład 3.2:

W celu wyznaczenia przyspieszenia ziemskiego za pomocą wahadła prostego wykorzystano zależność: $g = 4\pi^2 n^2 (l + 0,5d) t^{-2}$, gdzie: n – liczba okresów drgań wahadła, t – czas pomiaru drgań, l – długość nici, na której zawieszony jest kulisty ciężarek, d – średnica ciężarka. Wykonano $N = 6$ pomiarów długości nici, średnicy kulki oraz czasu wykorzystując odpowiednio linijkę ($\Delta l = 1$ mm), suwmiarkę ($\Delta d = 0,1$ mm) oraz stoper elektroniczny ($\Delta t = 0,01$ s). Przyjęto liczbę okresów drgań $n = 20$. Na podstawie obliczeń otrzymano następujące wartości średniej oraz odchylenia standardowego średniej: $\bar{l} = 0,972$ m, $s_{\bar{l}} = 0,00071$ m; $\bar{d} = 0,023$ m, $s_{\bar{d}} = 0$; $\bar{t} = 39,72$ s, $s_{\bar{t}} = 0,034$ s; $\bar{g} = 9,849$ ms⁻². Przeprowadź ocenę niepewności wyznaczenia przyspieszenia ziemskiego g .

Zmienna zależna g jest funkcją kilku zmiennych niezależnych $g = f(l, d, t)$. Wielkości te zostały zmierzone bezpośrednio za pomocą przyrządów o różnej dokładności. Niepewność eksperymentatora oszacowano umownie (występuje zatem niepewność typu B). Ponieważ pomiar powtórzono kilkakrotnie, wyniki podlegają standardowej analizie statystycznej, np. obliczeniu średniej (występuje niepewność typu A). Należy najpierw wyznaczyć całkowitą niepewność standardową dla poszczególnych zmiennych zależnych, a następnie wyznaczyć niepewność złożoną zmiennej g .

Długość nici – całkowita niepewność standardowa:

$$u(l) = \sqrt{s_l^2 + \frac{(\Delta l)^2}{3} + \frac{(\Delta l_E)^2}{3}} = \sqrt{0,00071^2 + \frac{0,001^2}{3} + \frac{0,001^2}{3}} \text{ m} = 0,0011 \text{ m}$$

Średnica ciężarka – całkowita niepewność standardowa:

$$u(d) = \sqrt{\frac{(\Delta d)^2}{3} + \frac{(\Delta d_E)^2}{3}} = \sqrt{\frac{0,0001^2}{3} + \frac{0,0001^2}{3}} \text{ m} = 0,000082 \text{ m}$$

Czas – całkowita niepewność standardowa:

$$u(t) = \sqrt{s_t^2 + \frac{(\Delta t)^2}{3} + \frac{(\Delta t_E)^2}{3}} = \sqrt{0,034^2 + \frac{0,01^2}{3} + \frac{0,2^2}{3}} \text{ s} = 0,12 \text{ s}$$

Przyspieszenie ziemskie – niepewność złożona:

$$u(g) = \sqrt{\left(\frac{\partial g}{\partial l} \cdot u(l)\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial d} \cdot u(d)\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial t} \cdot u(t)\right)^2}$$

$$u(g) = \sqrt{\left(\frac{4\pi^2 n^2}{\bar{t}^2} \cdot u(l)\right)^2 + \left(\frac{2\pi^2 n^2}{\bar{t}^2} \cdot u(d)\right)^2 + \left(\frac{-8\pi^2 n^2 (\bar{l} + 0,5\bar{d})}{\bar{t}^3} \cdot u(t)\right)^2}$$

$$u(g) = 0,060 \text{ ms}^{-2}$$

Wartość tablicowa przyspieszenia ziemskiego w Polsce ($9,80665 \text{ ms}^{-2}$) mieści się w wyznaczonym przedziale $9,849 \pm 0,060 \text{ ms}^{-2}$. Doświadczenie zostało przeprowadzone prawidłowo.

3.3. ZAPIS WYNIKÓW POMIARU

Posiadając informacje o wartości (średniej) wyznaczonej wielkości x oraz jej niepewności standardowej $u(x)$, wynik końcowy można przedstawić na kilka sposobów. Niepewność podaje się z dokładnością do dwóch cyfr znaczących. Cyfra znacząca to pierwsza cyfra w rozwinięciu dziesiętnym danej wartości, która przyjmuje niezerową wartość. Przykładowo, dla ułamka dziesiętnego 0,006 pierwszą cyfrą znaczącą jest 6. Wynik pomiaru powinien zawierać tyle samo miejsc dziesiętnych, co jego niepewność. W przypadku otrzymania na drodze obliczeń większej liczby miejsc dziesiętnych, wyniki należy zaokrąglić zgodnie z zasadami matematycznymi.

Przykład 3.3:

W toku obliczeń otrzymano następujące wartości:

$$g = 9,80548 \text{ ms}^{-2}, u(g) = 0,0177 \text{ ms}^{-2}$$

Zatem:

Niepewność standardowa zostaje zaokrąglona do dwóch cyfr znaczących: $u(g) = 0,018 \text{ ms}^{-2}$. Na tej podstawie wartość przyspieszenia ziemskiego zostaje zaokrąglona do trzeciego miejsca dziesiętnego: $g = 9,805 \text{ ms}^{-2}$. Zapis wyniku można przedstawić następująco:

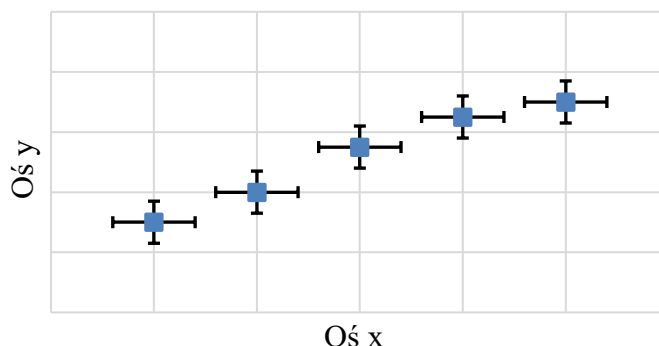
1. $g = 9,805 \text{ ms}^{-2}$, $u(g) = 0,018 \text{ ms}^{-2}$;
2. $g = (9,805 \pm 0,018) \text{ ms}^{-2}$;
3. $g = 9,805(0,018) \text{ ms}^{-2}$;
4. $g = 9,805(18) \text{ ms}^{-2} \leftarrow \text{ZAPIS REKOMENDOWANY.}$

W przypadku zastosowania zapisu niepewności rozszerzonej $U(x)$ ze współczynnikiem rozszerzenia $k = 2$:

5. $g = 9,805 \text{ ms}^{-2}$, $U(g) = 2 \cdot 0,018 = 0,036 \text{ ms}^{-2}$;
6. $g = (9,805 \pm 0,036) \text{ ms}^{-2}$, $k = 2$.

3.4. GRAFICZNA REPREZENTACJA WYNIKÓW

Wielkość szukaną wraz z jej niepewnością można przedstawić również graficznie za pomocą odpowiedniego wykresu, np. wykresu punktowego (Rys. 1). Każdy punkt reprezentuje oddzielną obserwację (pomiar). W programie Microsoft Excel wykres dodaje się poprzez zaznaczenie lewym przyciskiem myszy obszaru zawierającego dane pomiarowe, a następnie wybór karty Wstawianie $\rightarrow$ Wykresy. Alternatywnym sposobem jest wstawienie wykresu wybranego typu z karty Wstawianie bez uprzedniego zaznaczenia danych. W takim przypadku należy prawym przyciskiem myszy nacisnąć na pusty obszar wykresu, wybrać z pojawiającej się listy opcję Zaznacz dane. Dane do wykresu można wprowadzić poprzez zaznaczenie odpowiednich komórek arkusza (pole Zakres danych wykresu) lub jako serię poprzez opcję Dodaj. Istnieje możliwość późniejszej zmiany typu wykresu; po zaznaczeniu wykresu należy wybrać kartę Projekt wykresu $\rightarrow$ Zmień typ wykresu.



Rys. 1 Wykres punktowy

Aby uwzględnić niepewność wyznaczonej wielkości na wykresie, dodaje się słupki błędów (ang. *error bars*). W zależności od charakteru przeprowadzanych badań, słupki odzwierciedlają wartość odchylenia standardowego lub niepewności złożonej danego punktu pomiarowego zarówno w osi poziomej jak i pionowej. Słupki błędów dodaje się po zaznaczeniu myszką wykresu przez kartę Projekt wykresu $\rightarrow$ Dodaj element wykresu $\rightarrow$ Słupki błędów $\rightarrow$ Więcej opcji słupków błędów. Na wykresie pojawią się słupki, które można formatować korzystając z okna po prawej stronie ekranu. Aby przyporządkować im odpowiednie wartości, należy znaleźć w otwartym oknie formatowania pole Wielkość błędów $\rightarrow$ Niestandardowe $\rightarrow$ Określ wartość i następnie zaznaczyć przygotowaną wcześniej kolumnę z wartościami w arkuszu (zakłada się te same wartości dla dodatniej i ujemnej wartości błędów). Jeżeli brak jest danych o niepewności punktów w osi poziomej, słupki poziome należy usunąć.

4. ROZKŁAD GAUSSA

4.1. TEST SHAPIRO-WILKA

Test Shapiro-Wilka (S-W) jest to test statystyczny służący do sprawdzenia normalności rozkładu zmiennej losowej. Atutem testu jest jego duża skuteczność, tzn. moc. W porównaniu do innych testów występuje większe prawdopodobieństwo odrzucenia hipotezy zerowej, jeśli jest ona fałszywa.

Oznaczmy hipotezę zerową H_0 oraz alternatywną testu jako H_1 :

H_0 : rozkład badanej cechy jest rozkładem normalnym,

H_1 : rozkład badanej cechy nie jest rozkładem normalnym.

Etapy postępowania:

1. Uporządkowanie obserwacji $y_1, \dots, y_n$ niemalejąco. Zmieniając oznaczenie, otrzymujemy:
 $x_1 \leq x_2, \dots, x_{n-1} \leq x_n$.
2. Obliczenie: $S^2 = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$, gdzie: $\bar{x}$ – wartość średnia (średnia arytmetyczna).
3. Obliczenie: $b = \sum_{i=1}^m a_i (x_{n+1-i} - x_i)$, gdzie: n – całkowita liczba obserwacji. Jeśli n jest parzyste to $m = 0,5n$. W przeciwnym wypadku, $m = 0,5(n-1)$; a_i – parametr, którego wartości należy odczytać z tabeli (Załącznik 3) na podstawie liczby n oraz liczby porządkowej i -tej obserwacji.
4. Obliczenie statystyki: $W = \frac{b^2}{S^2}$.
5. Porównanie wyniku ze stabelaryzowanymi wartościami W_T (Załącznik 4) dla odpowiedniego poziomu prawdopodobieństwa (istotności) p oraz liczby n . Zazwyczaj przyjmuje się $p = 0,05$ czyli 5%. Obszar krytyczny testu S-W (obszar znajdujący się na krańcach rozkładu, którego szerokość determinuje wielkość p) jest obszarem lewostronnym. Hipotezę zerową H_0 należy zatem odrzucić, gdy $W \leq W_T$.

Przykład 4.1:

1. Wykonano 7 pomiarów, na podstawie których wyznaczono przyspieszenie ziemskie w ms^{-2} : $g_1 = 9,79$; $g_2 = 9,82$; $g_3 = 9,89$; $g_4 = 9,84$; $g_5 = 9,79$; $g_6 = 9,86$; $g_7 = 9,83$. Po uporządkowaniu niemalejąco: $g_1 = 9,79$; $g_2 = 9,79$; $g_3 = 9,82$; $g_4 = 9,83$; $g_5 = 9,84$; $g_6 = 9,86$; $g_7 = 9,89$. Liczba obserwacji: $n = 7$. Wartość średnia: $\bar{g} = 9,83$.
2. $S^2 = \sum_{i=1}^7 (g_i - \bar{g})^2 = (9,79 - 9,83)^2 + (9,79 - 9,83)^2 + (9,82 - 9,83)^2 + (9,83 - 9,83)^2 + (9,84 - 9,83)^2 + (9,86 - 9,83)^2 + (9,89 - 9,83)^2 = 0,0079$.
3. Liczba obserwacji jest nieparzysta, więc: $m = 0,5(7-1) = 3$.
 $b = \sum_{i=1}^3 a_i (g_{7+1-i} - g_i) = a_1 (g_7 - g_1) + a_2 (g_6 - g_2) + a_3 (g_5 - g_3) =$
 $0,6233(9,89 - 9,79) + 0,3031(9,86 - 9,79) + 0,1401(9,84 - 9,82) = 0,1512$.
4. Statystyka testu S-W: $W = \frac{b^2}{S^2} = \frac{0,1512^2}{0,0079} = 2,89$.
5. Dla poziomu istotności $p = 0,05$ oraz liczby obserwacji $n = 7$ tablicowa wartość testu wynosi $W_T = 0,803$. Ponieważ $W = 2,89 > W_T$, hipoteza zerowa jest właściwa. W przeciwnym wypadku hipotezę zerową należy odrzucić.

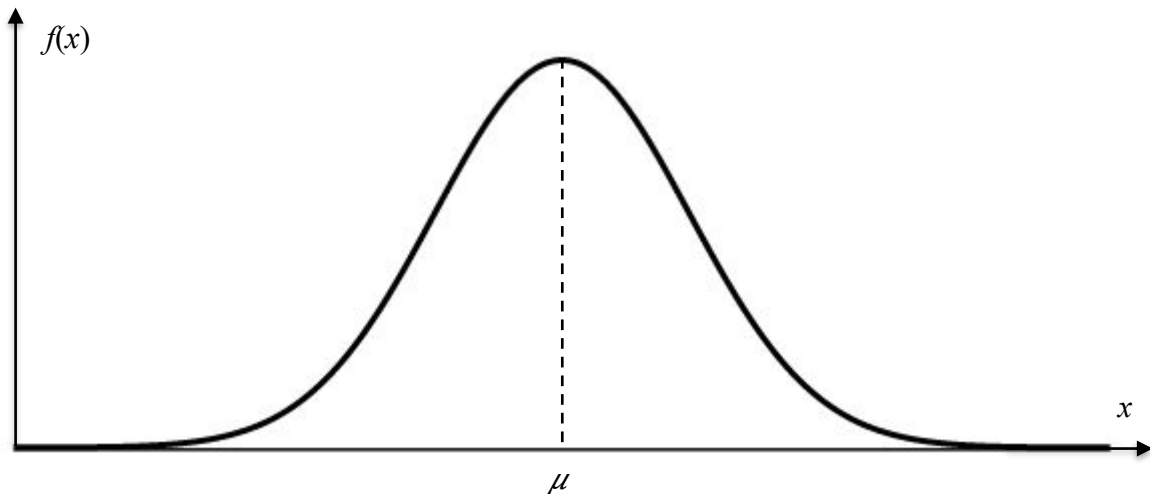
4.2. ROZKŁAD NORMALNY

Rozkład normalny jest rozkładem ciągłym zmiennej losowej X (wielkości badanej). Zmienna losowa stanowi przedział wartości o nieskończonej liczbie elementów x należących do zbioru liczb rzeczywistych a każda z tych wartości występuje z pewnym skończonym prawdopodobieństwem. Rozkład normalny charakteryzuje się tym, że najczęściej występujące obserwacje skoncentrowane są wokół wartości średniej zmiennej losowej a obserwacje występujące rzadziej są od niej proporcjonalnie oddalone. Rozkład normalny wymaga odpowiedniej liczby obserwacji; zalecana minimalna wartość wynosi 30. Rozkład zmiennej losowej opisuje funkcja gęstości prawdopodobieństwa $f(x)$:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad (11)$$

gdzie: x – wartość zmiennej losowej; σ – odchylenie standardowe: $\sigma = \sqrt{\frac{\sum(x_i - \bar{x})^2}{n-1}}$; x_i – i -ta wartość zmiennej losowej, $\bar{x}$ – wartość średnia (średnia arytmetyczna); n – całkowita liczba obserwacji; μ – wartość oczekiwana równa średniej arytmetycznej ze zmiennej losowej; σ^2 – wariancja, e – liczba Eulera (w przybliżeniu 2,718).

Funkcja gęstości prawdopodobieństwa przyjmuje wartości nieujemne, jest symetryczna względem prostej $x = \mu$ oraz osiąga największą wartość dla argumentu μ . Rys. 2 przedstawia wykres funkcji $f(x)$ zwanej również krzywą Gaussa.



Rys. 2 Rozkład normalny (krzywa Gaussa)

Całkując funkcję gęstości prawdopodobieństwa w pewnym przedziale, np. w granicach od $-\infty$ do x_1 , otrzymamy prawdopodobieństwo P zdarzenia, że zmienna losowa przyjmie wartość nie większą od x_1 . Tak zdefiniowaną wielkość nazywamy dystrybuantą i opisujemy wzorem:

$$F(x_1) = P(X \leq x_1) = \int_{-\infty}^{x_1} f(x) dx \quad (12)$$

Całka z funkcji gęstości w jej całym przedziale (od $-\infty$ do $+\infty$, tj. pole pod wykresem) ma wartość 1. W powyższym równaniu istotne jest zrozumienie zapisu zmiennej losowej wielką (X) oraz małą literą (x). W statystyce wielką literą oznacza się zmienną losową w rozumieniu

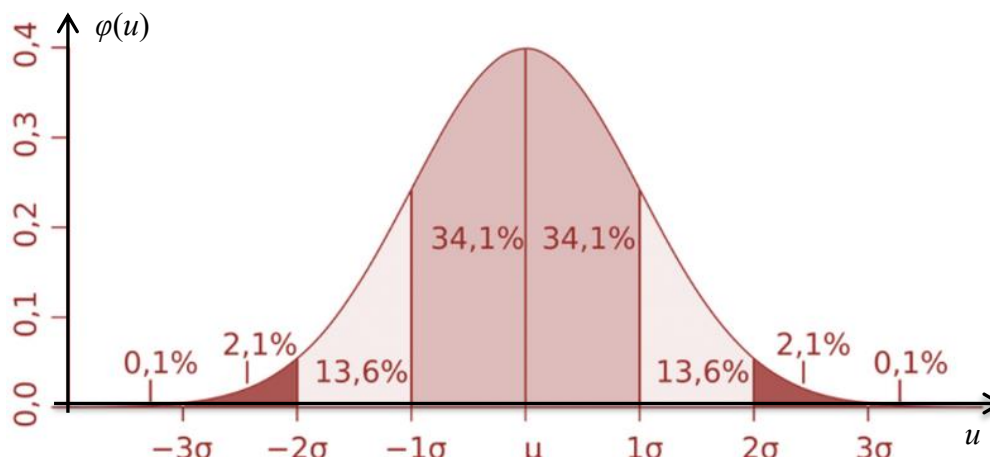
ogólnym lub jako funkcję mogącą przyjmować różne wartości. Małą literą oznacza się natomiast konkretne wartości zmiennej losowej lub wartości uzyskane z konkretnej próby.

Wyznaczenie prawdopodobieństwa zdarzenia w rozkładzie normalnym o wartości średniej μ oraz odchyleniu standardowym σ jest skomplikowane. Taki rozkład należy poddać standaryzacji (normalizacji) i skorzystać z tablic rozkładu normalnego. Standaryzacja ma na celu przekształcenie dowolnego rozkładu normalnego w rozkład standaryzowany, którego wartość średnia $\mu = 0$ i odchylenie standardowe $\sigma = 1$. Aby otrzymać taki rozkład, należy odjąć wartość średnią μ od wartości x zmiennej losowej, a następnie podzielić przez wartość odchylenia standardowego σ . Nową, standaryzowaną zmienną losową oznaczamy literą U . Standaryzowaną funkcję gęstości opisuje wzór:

$$\varphi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}}, \quad (13)$$

gdzie: u – wartość zmiennej standaryzowanej: $u = \frac{x-\mu}{\sigma}$.

Standaryzowany rozkład normalny został przedstawiony na Rys. 3.



Rys. 3 Standaryzowany rozkład normalny

Obserwacje zawierające się w przedziale $\mu \pm \sigma$ stanowią 68,2 % populacji (wszystkich obserwacji). Obserwacje w przedziale $\mu \pm 2\sigma$ stanowią 95,4 % populacji a 99,7 % populacji zawiera się w przedziale $\mu \pm 3\sigma$. Jest to tzw. kryterium 3 sigm. Kryterium to służy do wykrycia anomalii będących następstwem błędów podczas wykonywania pomiarów lub prób manipulacji danymi. Wartości spoza przedziału $\mu \pm 3\sigma$ mogą występować naturalnie, ale są podejrzane i mało prawdopodobne. Jeśli podajemy wynik pomiaru w postaci $\mu \pm 2\sigma$, stwierdzamy tym samym, że 95,4 % obserwacji jest obarczonych niepewnością mniejszą lub równą 2σ , zaś pozostałe wyniki są obciążone niepewnością większą niż 2σ .

Dystrybuantę standaryzowanego rozkładu normalnego określają poniższe równania:

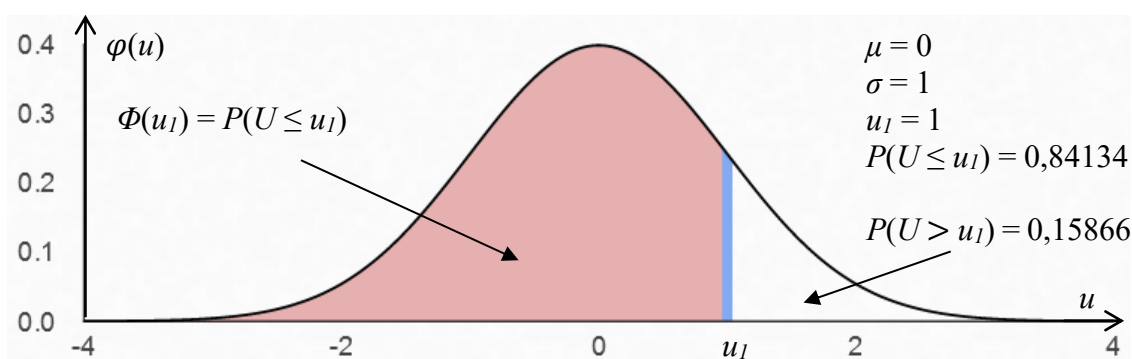
$$\Phi(u_1) = F(x_1) = P(X \leq x_1) = P(U \leq u_1) \quad (14a)$$

$$P(U > u_1) = 1 - \Phi(u_1) \quad (14b)$$

$$P(U \leq -u_1) = \Phi(-u_1) = 1 - \Phi(u_1) \quad (14c)$$

$$P(U > -u_1) = \Phi(u_1) \quad (14d)$$

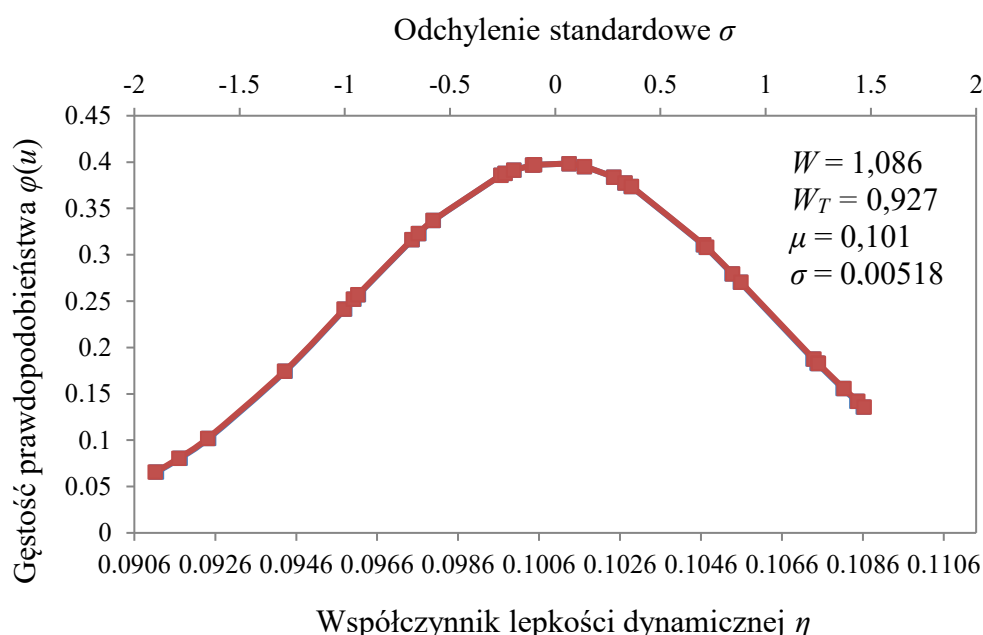
Prawidłowość tych równań można sprawdzić korzystając z przykładu na Rys. 4.



Rys. 4 Wyznaczanie dystrybuanty – przykład

Tablica standardowego rozkładu normalnego została dołączona jako Załącznik 5 i umożliwia odczytanie dystrybuanty dla danej wartości u zmiennej losowej standaryzowanej U . Wiersze tabeli uszeregowano względem wartości u z dokładnością do części dziesiętnych a kolumny odpowiadają części tysięcznej liczby u . Aby znaleźć dystrybuantę dla przykładowej wartości 1,65, tj. $\Phi(1,65)$, należy odnaleźć wiersz oznaczony jako 1,6 i kolumnę z oznaczeniem 0,05. W tym przypadku dystrybuanta wynosi 0,95053.

Poniższy rysunek (Rys. 5) przedstawia rozkład normalny próby 30 obserwacji, dokonanych w celu wyznaczenia wartości współczynnika lepkości dynamicznej η pewnej cieczy.



Rys. 5 Rozkład normalny – współczynnik lepkości dynamicznej

Po przeprowadzeniu testu Shapiro-Wilka i przyjęciu hipotezy zerowej H_0 , obliczono funkcję gęstości prawdopodobieństwa zmiennej η a następnie przeprowadzono jej standaryzację. Rys. 5 przedstawia zależność standaryzowanej gęstości prawdopodobieństwa od wartości zmiennej η (pozioma oś główna) oraz zmiennej standaryzowanej – odchylenia standardowego (pozioma oś pomocnicza). Powyższe zestawienie można uzyskać odpowiednio skalując

i ograniczając poziome osie, tak aby ich wartości były równoważne. Wszystkie wartości współczynnika lepkości mieszczą się w przedziale $\mu \pm 3\sigma$, zatem spełniają kryterium 3 sigm.

Przykładowe obliczenia dystrybucyjności Φ dla wybranych wartości zmiennej η :

$$\eta_1 = 0,09966 \rightarrow u_1 = \frac{\eta_1 - \mu}{\sigma} = -0,26 \rightarrow \Phi(-u_1) = 1 - \Phi(u_1) = 0,397$$

$$\eta_2 = 0,10288 \rightarrow u_2 = \frac{\eta_2 - \mu}{\sigma} = 0,36 \rightarrow \Phi(u_2) = 0,641$$

Obliczenie prawdopodobieństwa występowania wartości zmiennej η z określonego przedziału:

$$P(\eta_1 \leq \eta \leq \eta_2) = 0,641 - 0,397 = 0,244$$

Podsumowanie – etapy postępowania:

1. Uporządkowanie obserwacji niemalejąco,
2. Przeprowadzenie testu Shapiro-Wilka i zamieszczenie obliczeń w tabeli (Tabela 2),

Tabela 2 Test Shapiro-Wilka – obliczenia

Lp.	x	$\bar{x}$	S_i^2	S^2	a_i	b_i	b	b^2	W	W_T
1										
2										
.										
.										
n										
$W.....W_T$ Hipoteza H_0 odrzucona: TAK/NIE										

3. W przypadku przyjęcia hipotezy zerowej, obliczenie funkcji gęstości prawdopodobieństwa oraz standaryzowanej funkcji gęstości prawdopodobieństwa i zamieszczenie obliczeń w tabeli (Tabela 3),

Tabela 3 Rozkład normalny – obliczenia

Lp.	x	$f(x)$	u	$\varphi(u)$
1				
2				
.				
.				
n				
Średnia μ		-		-
Odch.std. σ		-		-

4. Przedstawienie zależności standaryzowanej gęstości prawdopodobieństwa $\varphi(u)$ od wartości zmiennej losowej x na wykresie (Rys. 5),
5. Wyznaczenie dystrybucyjności $\Phi(u)$ dla kilku wybranych wartości x zmiennej losowej,
6. Obliczenie prawdopodobieństwa występowania wartości x zmiennej losowej z określonego przedziału.

5. ROZKŁAD POISSONA

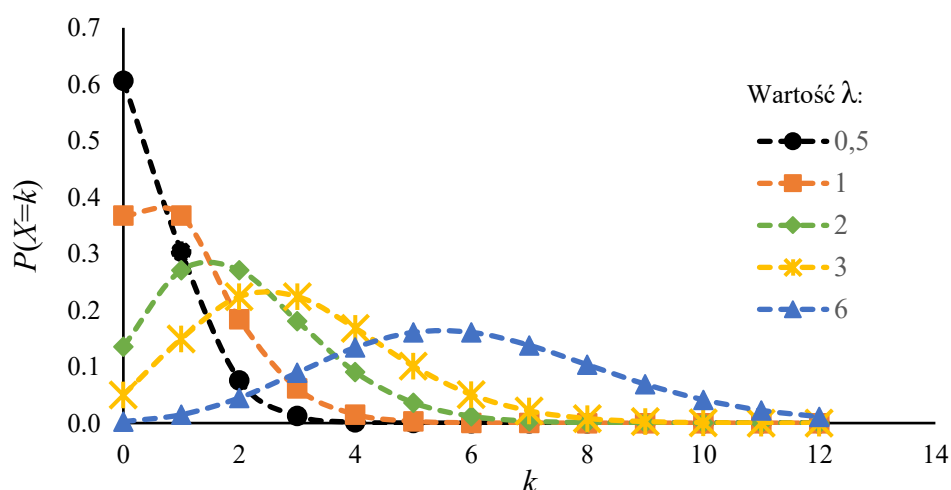
Rozkład Poissona jest rozkładem dyskretnym zmiennej losowej X , tj. zmienna losowa przyjmuje wyłącznie ściśle określone wartości. Rozkład ten opisuje liczbę zdarzeń, które występują w określonym czasie lub przestrzeni, przy założeniu, że zdarzenia są od siebie niezależne a średnia liczba zdarzeń pozostaje stała. Rozkład Poissona służy do modelowania zjawisk lub procesów, w których zdarzenia występują rzadko a ich liczba jest mała w stosunku do całkowitej liczby możliwych zdarzeń. Do przykładowych zastosowań można zaliczyć modelowanie liczby: sprzedanego produktu w określonym przedziale czasu, emitowanych cząstek promieniotwórczych, awarii urządzeń czy wypadków drogowych. Rozkład może być również wykorzystywany jako przybliżenie rozkładu dwumianowego (Bernoulliego), gdy liczba prób jest duża ($n \geq 50$), a prawdopodobieństwo sukcesu jest małe ($p \leq 0,1$).

Funkcja masy prawdopodobieństwa P niniejszego rozkładu opisana jest wzorem:

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad (15)$$

gdzie: k – liczba zdarzeń (sukcesów), $k \in N$; λ – średnia liczba zdarzeń w określonym czasie lub przestrzeni.

Rozkład Poissona charakteryzuje wyłącznie jeden parametr – średnia liczba zdarzeń λ . Wartość oczekiwana (średnia) oraz wariancja zmiennej losowej o rozkładzie Poissona są sobie równe. Odchylenie standardowe rozkładu wynosi $\sigma = \sqrt{\lambda}$. W odróżnieniu od rozkładu normalnego, graficzna reprezentacja rozkładu Poissona nie jest symetryczna. Rozkład jest prawoskośny i posiada tzw. kurtozę czyli wydęcie, „ogony” rozkładu są „grubsze” niż w rozkładzie normalnym, a ten z prawej strony jest dłuższy. Dla dużych wartości λ rozkład staje się bardziej symetryczny (Rys. 6) i przypomina rozkład normalny.



Rys. 6 Rozkład Poissona

Dystrybuantę rozkładu Poissona opisuje poniższe równanie:

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{k \leq x} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \quad (16)$$

Całkowite prawdopodobieństwo wystąpienia wszystkich możliwych zdarzeń $k = \{0, 1, 2, \dots, \infty\}$ wynosi 1. Prawdopodobieństwo wystąpienia k zdarzeń można obliczyć ze wzoru na funkcję masy prawdopodobieństwa lub odczytać z tablicy w Załączniku 6.

Przykład 5.1:

Jeżeli prawdopodobieństwo wystąpienia skutków ubocznych po zażyciu leku wynosi 0,003, określ prawdopodobieństwo, z jakim wystąpią one u więcej niż 2 pacjentów na 1000.

Rozwiązanie:

1. Interpretacja danych: prawdopodobieństwo sukcesu (zdarzenia) $p = 0,003$; liczba prób $n = 1000$, X – liczba pacjentów ze skutkami ubocznymi.
2. Wyznaczenie średniej liczby zdarzeń: $\lambda = p \cdot n = 0,003 \cdot 1000 = 3$.
3. Zdefiniowanie szukanego prawdopodobieństwa: $P(X > 2) = 1 - \{P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)\}$.
4. Obliczenia:

$$P(X = 0) = \frac{3^0}{0!} e^{-3} = 0,0498$$

$$P(X = 1) = \frac{3^1}{1!} e^{-3} = 0,1494$$

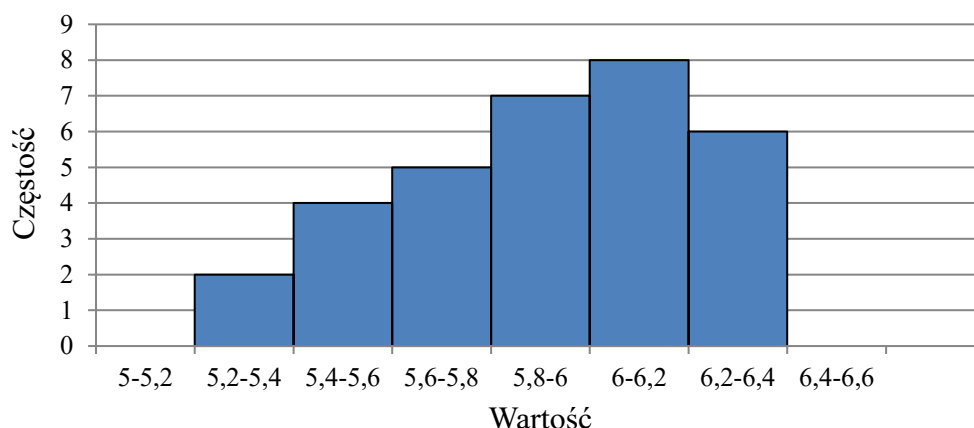
$$P(X = 2) = \frac{3^2}{2!} e^{-3} = 0,2240$$

$$P(X > 2) = 1 - 0,0498 - 0,1494 - 0,2240 = 0,5768$$

Poprawność obliczeń można sprawdzić w programie Microsoft Excel poprzez zastosowanie funkcji ROZKŁ.POISSON, której składnia wygląda następująco: ROZKŁ.POISSON (x; średnia; skumulowany), gdzie: x – wartość zmiennej losowej X odpowiadająca liczbie k , średnia – wartość odpowiadająca średniej liczbie zdarzeń λ , skumulowany – wartość logiczna, od której zależne jest użycie funkcji rozkładu skumulowanego. W przypadku określenia tej wartości jako PRAWDA lub 1, funkcja zwraca prawdopodobieństwo wystąpienia k lub mniejszej liczby zdarzeń. W przeciwnym wypadku zwracane jest prawdopodobieństwo wystąpienia dokładnie k zdarzeń.

6. HISTOGRAM

Kolejnym sposobem analizy danych jest sporządzenie histogramu. Histogram to graficzna reprezentacja danych – wykres słupkowy, który informuje z jaką częstością występują poszczególne wartości zmiennej losowej. Metoda może być wykorzystywana zarówno dla zmiennej losowej dyskretnej jak i ciągłej. Przykładowy histogram został przedstawiony na Rys. 7.



Rys. 7 Histogram

Poniższy opis dotyczy sporządzania histogramów w programie Microsoft Excel. Dedykowane programy do analizy statystycznej wykonują część lub wszystkie opisane operacje automatycznie.

Etapy postępowania:

1. Przed przystąpieniem do obróbki danych należy aktywować dodatek Analysis ToolPak w programie Microsoft Excel. W tym celu należy wejść w Opcje → Dodatki → podświetlić w liście dodatek Analysis ToolPak → Przejdź → zaznaczyć Analysis ToolPak. Jeżeli pojawi się komunikat o konieczności instalacji dodatku, należy postępować zgodnie z wyświetlanymi poleceniami. Po aktywacji, dodatek jest dostępny w karcie Dane w polu Analiza.
2. Uporządkowanie obserwacji $y_1, \dots, y_n$ niemalejąco. Otrzymujemy: $x_1 \leq x_2, \dots, x_{n-1} \leq x_n$. Zanotowano i uszeregowano niemalejąco 32 obserwacje, które będą wykorzystywane w kolejnych etapach postępowania: 5,33; 5,36; 5,42; 5,48; 5,53; 5,59; 5,63; 5,68; 5,74; 5,76; 5,79; 5,83; 5,86; 5,89; 5,92; 5,95; 5,97; 6; 6,05; 6,07; 6,09; 6,12; 6,12; 6,14; 6,16; 6,2; 6,21; 6,25; 6,28; 6,28; 6,3; 6,4.
3. Na tym etapie należy ustalić, w jaki sposób chcemy pogrupować dane. Wartości ze zbioru należy rozdzielić na poszczególne przedziały – kosze (ang. *bins*). Liczba przedziałów będzie odpowiadała liczbie słupków na histogramie. Przyjęta wartość liczbową dla kosza odpowiada górnej granicy danego przedziału. Wartości liczbowe koszy i odpowiadające im przedziały należy zapisać w dwóch kolumnach, np.:

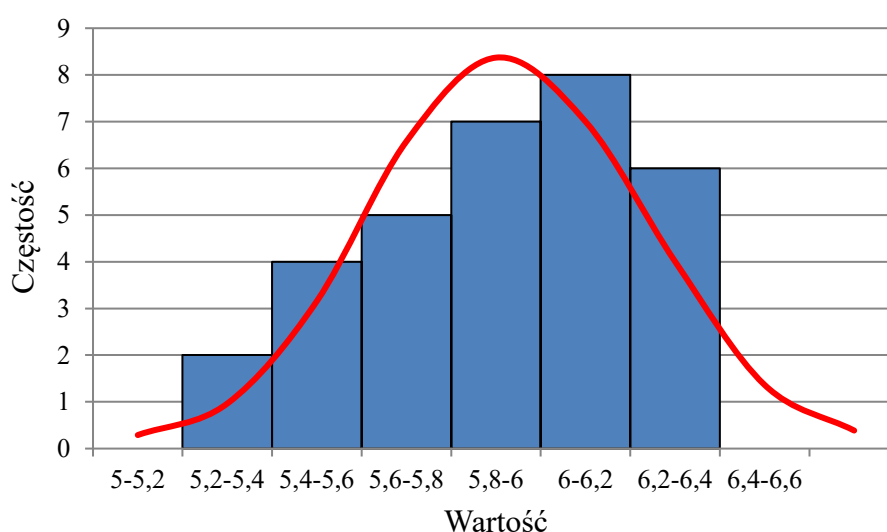
Kosz	Przedział
5,2	0-5,2
5,4	5,2-5,4
5,6	5,4-5,6
5,8	5,6-5,8
6	5,8-6
6,2	6-6,2
6,4	6,2-6,4
6,6	6,4-6,6

4. Teraz należy przejść do karty Dane i w polu Analiza wybrać Analiza danych → Histogram. W oknie Zakres komórek należy zaznaczyć zbiór obserwacji uporządkowany niemalejąco. W oknie Zakres zbioru należy zaznaczyć komórki z wartościami liczbowymi koszy. W opcjach wyjścia należy zaznaczyć zakres wyjściowy i wybrać pustą komórkę arkusza. Należy również zaznaczyć opcję „wykres wyjściowy” i wybrać przycisk OK. W arkuszu pojawi się tabelka z dwoma kolumnami oraz histogram. Kolumnę częstość należy przekopiować do swojej tabeli:

Kosz	Przedział	Częstość
5,2	5-5,2	0
5,4	5,2-5,4	2
5,6	5,4-5,6	4
5,8	5,6-5,8	5
6	5,8-6	7
6,2	6-6,2	8
6,4	6,2-6,4	6
6,6	6,4-6,6	0

5. Aby słupki w histogramie się ze sobą stykały należy prawym przyciskiem myszy nacisnąć na wykres, wybrać Formatuj serię danych, a następnie Szerokość odstępu ustawić na 0%. Aby lepiej było widać poszczególne przedziały, po zaznaczeniu wykresu lewym przyciskiem myszy należy wejść w kartę Formatowanie → Kontury kształtu → Czarny. Etykiety osi poziomej można zmodyfikować po naciśnięciu prawym przyciskiem myszy na wykresie i wybraniu opcji Zaznacz dane i Edytuj po prawej stronie okna. Należy zaznaczyć obszar w arkuszu kalkulacyjnym odpowiadający kolumnie Przedział.

Histogram można zestawić z funkcją rozkładu Gaussa (Rys. 8) lub Poissona, co pozwala na dodatkowy stopień jakościowej analizy danych. Przykładowo, im bardziej wykres słupkowy wpasowany jest w krzywą Gaussa, tym większe prawdopodobieństwo, że rozkład jest normalny.



Rys. 8 Histogram z naniesioną krzywą Gaussa

6. W celu nałożenia krzywej Gaussa na histogram, należy wygenerować zbiór punktów o rozkładzie normalnym. Parametry rozkładu muszą odpowiadać parametrom pierwotnego zbioru wartości zmiennej losowej. Należy obliczyć wartość minimalną, maksymalną, średnią arytmetyczną oraz odchylenie standardowe ze zbioru wartości zmiennej losowej stosując odpowiednio funkcje MIN(), MAX(), ŚREDNIA() oraz ODCH.STANDARDOWE.A(). W opisywanym przypadku wynoszą one odpowiednio: 5,33; 6,4; 5,91875 oraz 0,29865.
7. W karcie Dane i w polu Analiza wybrać Analiza danych → Generowanie liczb pseudolosowych. W polu Liczba zmiennych wpisać 1. W polu Liczba wartości początkowo wpisać 5000 (odpowiednią wartość należy dobrać eksperymentalnie, obserwując kształt krzywej. Ogólnie, im wyższa wartość, tym krzywa Gaussa będzie bardziej wygładzona). W polu Rozkład wybrać Normalny. Wartość średniej i odchylenia standardowego uzupełnić na podstawie pkt. 6. Zaznaczyć zakres wyjściowy i kliknąć na pustą komórkę arkusza kalkulacyjnego. Nacisnąć OK.
8. Teraz należy postępować zgodnie z pkt. 4 dla wygenerowanych wartości. Należy wykorzystać te same wartości koszy co poprzednio. Nie zaznaczać opcji wykres wyjściowy. Kolumnę częstość przekopiować do swojej tabeli i zmienić nazwę na np. Częstość N:

Kosz	Przedział	Częstość	Częstość N
5,2	5-5,2	0	45
5,4	5,2-5,4	2	150
5,6	5,4-5,6	4	491
5,8	5,6-5,8	5	1023
6	5,8-6	7	1302
6,2	6-6,2	8	1089
6,4	6,2-6,4	6	623
6,6	6,4-6,6	0	212

9. Aby dodać dane do histogramu należy po naciśnięciu prawym przyciskiem myszy wybrać Zaznacz dane i następnie Dodaj po lewej stronie okna. Serię można roboczo nazwać Rozkład. W polu wartość serii należy zaznaczyć kolumnę Częstość N. Po zatwierdzeniu, na histogramie pojawi się drugi wykres słupkowy.
10. Teraz należy zmienić typ wykresu. Naciskając prawym przyciskiem myszy na nowy wykres, należy wybrać Zmień typ wykresu seryjnego. W oknie dla serii Rozkład należy zmienić typ wykresu na Punktowy z wygładzonymi liniami oraz zaznaczyć Oś pomocnicza. Zmiany zatwierdzić przyciskiem OK. Jeżeli powstały rozkład Gaussa jest niesymetryczny należy w pkt. 8 dodać kolejny kosz i wykonać obliczenia. Dla dodatkowego kosza 6,8 (przedział 6,6 – 6,8) Częstość wynosi ponownie 0, a Częstość N 60.
11. Legendę histogramu można usunąć. Oś pomocniczą można zamaskować wybierając ją lewym przyciskiem myszy i w karcie Formatowanie → Kontury kształtu → Białe. Histogram można uzupełnić o tytuł, linie siatki oraz tytuły osi.

7. REGRESJA LINIOWA

7.1. METODA NAJMNIEJSZYCH KWADRATÓW

Metoda najmniejszych kwadratów jest klasyczną metodą regresji liniowej. Przy jej pomocy otrzymuje się parametry najlepiej dopasowanego wielomianu do zbioru punktów doświadczalnych. Metoda bierze swą nazwę od operacji mającej na celu znalezienie takiej funkcji, aby suma kwadratów różnic między wartościami zmierzonymi y_i i obliczonymi była jak najmniejsza. Jest to tzw. postulat Gaussa.

W przypadku zajęć laboratoryjnych najczęściej spotykaną zależnością między dwiema wielkościami jest zależność liniowa. Funkcję liniową opisuje następujące równanie:

$$y = ax + b, \quad (16)$$

gdzie: a – współczynnik kierunkowy prostej, b – wyraz wolny.

Aby uzyskać informację, jak silnie zmienne x i y są liniowo skorelowane, należy wyznaczyć współczynnik korelacji liniowej Pearsona r , gdzie: $r \in \langle -1, 1 \rangle$. Przypadek $r = 0$ oznacza brak liniowej korelacji. Przypadek $r = \pm 1$ oznacza idealną zależność liniową. Ujemna wartość oznacza, że wartość zmiennej zależnej y maleje wraz ze wzrostem wartości zmiennej niezależnej x . Współczynnik Pearsona wyznacza się następująco:

$$r = \frac{\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum (x_i - \bar{x})^2 \sum (y_i - \bar{y})^2}}, \quad (17)$$

gdzie: $\bar{x}$, $\bar{y}$ – wartość średnia zmiennych.

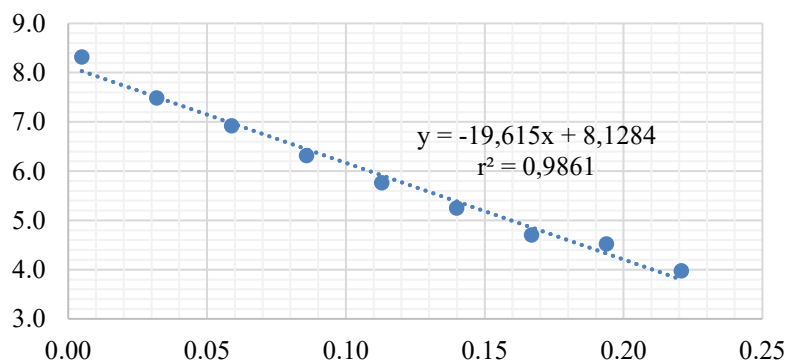
Używając metody najmniejszych kwadratów, parametry prostej wyznacza się na podstawie poniższych wzorów:

$$a = \frac{n(\sum x_i y_i) - (\sum x_i)(\sum y_i)}{n(\sum x_i^2) - (\sum x_i)^2}, \quad (18)$$

gdzie: n – liczba pomiarów.

$$b = \frac{(\sum x_i^2)(\sum y_i) - (\sum x_i)(\sum x_i y_i)}{n(\sum x_i^2) - (\sum x_i)^2} = \frac{1}{n} \left(\sum y_i - a \sum x_i \right) \quad (19)$$

Przykładowe zastosowanie metody najmniejszych kwadratów przedstawia Rys. 9.



Rys. 9 Dopasowanie prostej do zbioru punktów metodą najmniejszych kwadratów

Niepewność wyznaczonych parametrów w postaci odchylenia standardowego oblicza się następująco:

$$S_a = \sqrt{\frac{n[\sum y_i^2 - a \sum x_i y_i - b \sum y_i]}{(n-2)[n(\sum x_i^2) - (\sum x_i)^2]}} \quad (20)$$

$$S_b = S_a \cdot \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{n}} \quad (21)$$

Podsumowanie – etapy postępowania:

1. Określenie poziomu liniowej zależności między dwoma zmiennymi poprzez wyznaczenie współczynnika korelacji liniowej Pearsona i zamieszczenie obliczeń w tabeli (Tabela 4),

Tabela 4 Współczynnik korelacji liniowej Pearsona – obliczenia

Lp.	x_i	$\bar{x}$	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$	y_i	$\bar{y}$	$y_i - \bar{y}$	$(y_i - \bar{y})^2$	$(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$	r
1										
2										
.										
.										
n										

2. Poprawność obliczeń należy sprawdzić w programie Microsoft Excel poprzez zastosowanie funkcji PEARSON o następującej składni: PEARSON(tablica1; tablica2), gdzie: tablica1 – zbiór wartości zmiennej niezależnej, tablica2 – zbiór wartości zmiennej zależnej,
3. W przypadku stwierdzenia liniowej korelacji zmiennych należy wyznaczyć parametry najlepiej dopasowanej prostej do zbioru punktów. Obliczenia parametrów wraz z ich niepewnością należy zamieścić w kolejnej tabeli (Tabela 5),

Tabela 5 Metoda najmniejszych kwadratów – obliczenia

Lp.	x_i	y_i	$x_i y_i$	x_i^2	y_i^2	a	b	S_a	S_b
1									
2									
.									
.									
n									
Suma:									

4. Poprawność obliczeń należy sprawdzić w programie Microsoft Excel poprzez zastosowanie funkcji REGLINP, której składnia wygląda następująco: REGLINP(znane_y; [znane_x]; [stała]; [statystyka]), gdzie: znane_y – zbiór wartości zmiennej zależnej, [znane_x] – zbiór wartości zmiennej niezależnej, [stała] – wartość logiczna określająca sposób wyznaczania wyrazu wolnego b , [statystyka] – wartość logiczna, od której zależne jest wyznaczenie dodatkowej statystyki regresji. W przypadku określenia ostatniej wartości jako PRAWDA lub 1, funkcja REGLINP zwróci dodatkowe

informacje w postaci macierzy. W tym celu należy zaznaczyć w arkuszu kalkulacyjnym obszar o wymiarach 3x2, wprowadzić formułę i na koniec nacisnąć kombinację klawiszy CTRL+SHIFT+ENTER. Kolejne wiersze macierzy przedstawiają od lewej do prawej wartości a , b , S_a , S_b , r^2 oraz S_y – błąd standardowy prognozowanej wartości y . Obliczona niepewność parametrów prostej może nieznacznie różnić się od wartości uzyskanych za pomocą funkcji REGLINP.

7.2. TEST ZGODNOŚCI χ^2 (CHI KWADRAT)

Test zgodności (ang. *goodness-of-fit*) jest jedną z odmian testu chi kwadrat służącą do badania zależności między zbiorem danych a przyjętym modelem matematycznym określonego rozkładu. Innymi słowy, test ten umożliwia weryfikację hipotezy o typie rozkładu zmiennej losowej. W kontekście korelacji liniowej zaletą tego testu w porównaniu do obliczeń współczynnika korelacji Pearsona jest jego wyższa dokładność (współczynnik r przyjmuje zazwyczaj wartości bardzo bliskie ± 1 w doświadczeniach laboratoryjnych) oraz informacja o dopasowaniu poszczególnych punktów pomiarowych. Test χ^2 pełni zatem rolę uzupełniającą. Przeprowadza się go korzystając z następującego wzoru:

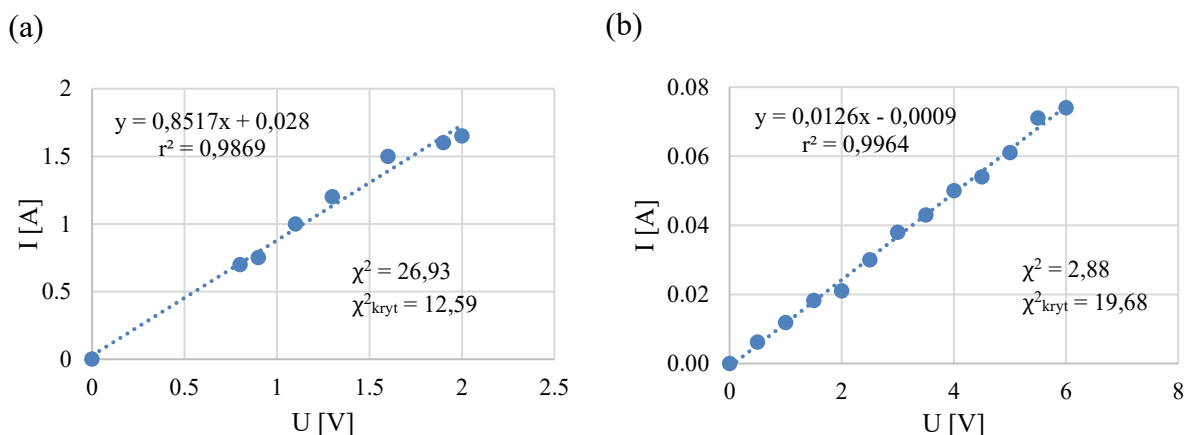
$$\chi^2 = \sum_{i=1}^n \left(\frac{y_i - f(x_i)}{u(y_i)} \right)^2 = \sum_{i=1}^n \frac{(y_i - ax_i - b)^2}{u^2(y_i)}, \quad (22)$$

gdzie: n – liczba obserwacji (pomiarów), y_i – zmierzona wartość na osi pionowej, $f(x_i)$ – wartość zastosowanej funkcji liniowej odpowiadająca argumentowi x_i , $u(y_i)$ – niepewność standardowa dla y_i .

Zastosowanie testu zgodności jest ograniczone do przypadków, gdy niepewność standardowa dla poszczególnych punktów pomiarowych jest znana lub możliwa do oszacowania (dostępne są informacje o dokładności przyrządów pomiarowych i/lub pomiary zostały przeprowadzone wielokrotnie). Dopasowanie prostej do wyników doświadczalnych odbywa się przez porównanie wartości χ^2 testu do wartości krytycznej χ_{kryt}^2 (Załącznik 7). Wartość krytyczną wybiera się z kolei na podstawie dwóch parametrów; poziomu istotności (próg prawdopodobieństwa, poniżej którego odrzucana jest hipoteza zerowa), którego wartość przyjmuje się zazwyczaj jako $\alpha = 0,05$ oraz liczby stopni swobody $DF = n - 2$. Jeżeli $\chi^2 > \chi_{kryt}^2$, to hipotezę zerową należy odrzucić (wielkości nie są liniowo skorelowane). W przeciwnym wypadku hipotezę należy przyjąć. W przypadku, gdy χ^2 przyjmuje niewielką wartość w stosunku do wartości krytycznej, istnieje podejrzenie o przyjęciu zbyt dużej niepewności standardowej. Takie pomiary można powtórzyć z wykorzystaniem dokładniejszych przyrządów lub należy zweryfikować poprawność obliczeń niepewności. Dodatkowo wartość χ^2 dla poszczególnych punktów pomiarowych nie powinna przekraczać 1.

Przykładowe zastosowanie testu zgodności χ^2 przedstawia Rys. 10. Są to pomiary mające na celu potwierdzenie prawa Ohma z danymi doświadczalnymi. Przedmiotem badań są elementy liniowe w postaci różnych oporników. Napięcie regulowane jest za pomocą zasilacza, natężenie prądu mierzone jest amperomierzem cyfrowym o dokładności $\pm (0,5\% + 5)$. Chociaż w obydwu przypadkach współczynnik korelacji liniowej jest praktycznie równy jedności ($r > 0,99$), dopiero przeprowadzenie testu χ^2 daje bardziej miarodajne wyniki.

W pierwszym przypadku (Rys. 10a) $\chi^2 > \chi_{kryt}^2$, co każe odrzucić hipotezę o liniowej zależności między mierzonymi wielkościami. W drugim przypadku $\chi^2 < \chi_{kryt}^2$, zatem liniowa korelacja zmiennych zostaje potwierdzona.



Rys. 10 Prawo Ohma – test zgodności χ^2 na przykładzie wyznaczanej rezystancji oporników
 Przyczyną nieliniowej zależności między natężeniem prądu oraz napięciem na badanym oporniku może być na przykład jego nagrzewanie się.

Podsumowanie – etapy postępowania:

1. Wyznaczanie parametrów najlepiej dopasowanej prostej do zbioru punktów metodą najmniejszych kwadratów (Tabela 5),
2. Określenie niepewności standardowej $u(y_i)$ dla współrzędnej pionowej każdego punktu pomiarowego. W zależności od warunków pomiaru niepewność może być stała lub różnić się,
3. Wyznaczenie wartości $f(x_i)$ oraz χ_i^2 dla kolejnych punktów pomiarowych i przedstawienie obliczeń w Tabeli 6,

Tabela 6 Test zgodności χ^2 – obliczenia

Lp.	x_i	y_i	$u(y_i)$	$f(x_i)$	χ_i^2	χ_{kryt}^2
1						
2						
·						
·						
n						
Suma:						
$\chi^2 \dots \chi_{kryt}^2$					Hipoteza H_0 odrzucona: TAK/NIE	

4. Odczytanie wartości krytycznej χ_{kryt}^2 dla odpowiedniego poziomu istotności i liczby stopni swobody (Załącznik 7),
5. Stwierdzenie akceptacji lub odrzucenia hipotezy zerowej H_0 o korelacji liniowej danych.

8. PRZYGOTOWANIE DO ZAJĘĆ

Przed przystąpieniem do zajęć laboratoryjnych należy zapoznać się z instrukcją do ćwiczenia znajdującą się na stronie <http://www.zeft.pollub.pl> w zakładce *Laboratorium Fizyki*. Podczas zajęć student zobowiązany jest do udzielenia odpowiedzi w formie ustnej lub pisemnej dotyczącej zagadnień związanych w wykonywanym ćwiczeniem. Lista zagadnień teoretycznych wraz z przykładową literaturą znajduje się na początku każdej instrukcji.

Student przychodzi na zajęcia z przygotowanym protokołem pomiarowym. Jest to dokument, w którym studenci zamieszczają dane pomiarowe w trakcie zajęć. Protokół podpisywany jest pod koniec zajęć przez prowadzącego i należy go dołączyć do sprawozdania jako załącznik. Wzór protokołu pomiarowego znajduje się w Załączniku 8. Zaleca się posiadanie niniejszego skryptu w wersji papierowej lub cyfrowej podczas zajęć.

Sprawozdanie z wykonanego ćwiczenia należy przynieść do oceny na kolejne zajęcia. Sprawozdanie powinno w spójny i logiczny sposób przedstawiać cel ćwiczenia, metodę wykonania pomiarów, obliczenia i analizę danych pomiarowych oraz zawierać sformułowane wnioski. Wzór sprawozdania znajduje się w Załączniku 9.

Chociaż skrypt opisuje analizę danych pomiarowych na przykładzie programu Microsoft Excel, dopuszczalne jest używanie takich programów/platform jak MATLAB, Origin, Statistica lub innych dedykowanych programów do statystycznej analizy danych. Wybór alternatywnego programu nie zwalnia jednak studenta z zamieszczenia w sprawozdaniu odpowiednich obliczeń.

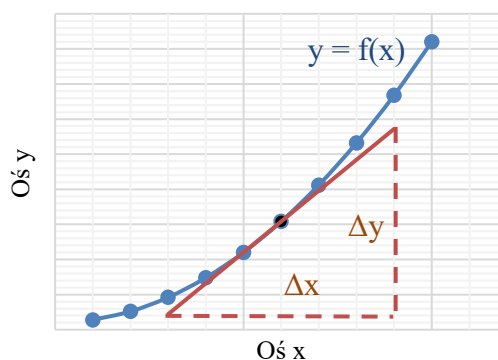
9. BIBLIOGRAFIA

Niniejszy skrypt został opracowany na podstawie przeglądu literatury w postaci krajowych i zagranicznych podręczników akademickich oraz zweryfikowanych źródeł w Sieci. Autor zachęca czytelnika do dalszego zgłębiania zagadnień ze statystyki, m.in. korzystając z załączonej bibliografii:

1. A. Zięba, Analiza danych w naukach ścisłych i technice, PWN, 2014
2. J. Jóźwiak, J. Podgórski, Statystyka od podstaw, PWE, 2012
3. W. Krysicki, J. Bartos, W. Dyczka, K. Królikowska, M. Wasilewski, Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka matematyczna w zadaniach, tom 1, PWN, 2002
4. W. Krysicki, J. Bartos, W. Dyczka, K. Królikowska, M. Wasilewski, Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka matematyczna w zadaniach, tom 2, PWN, 2007
5. R. J. Larsen, M. L. Marx, An Introduction to Mathematical Statistics and Its Applications, Pearson Education Limited, 2012
6. JCGM (2008). Ewaluacja danych pomiarowych - przewodnik wyrażania niepewności pomiaru, WEB: <https://www.gum.gov.pl/pl/dzialalnosc-badawcza/publikacje/>
7. StatSoft (2006). Elektroniczny Podręcznik Statystyki PL, Krakow, WEB: <http://www.statsoft.pl/textbook/stathome.html>

Pochodna funkcji określa charakter jej zmian w danym przedziale. Możliwe jest również wyznaczenie zmienności funkcji w jej konkretnym punkcie. Graficznie jest to linia prosta, styczna do wykresu funkcji. Im większe jej nachylenie, tym większe jest tempo zmian. Matematycznie pochodną definiuje się jako:

$$\frac{dy}{dx} \equiv \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$



Za pomocą pochodnych można określić monotoniczność oraz ekstrema danej funkcji.

Wyróżnia się trzy równoważne sposoby zapisu (notacji) pochodnych. Jeżeli dana jest funkcja $y = f(x)$, to jej pochodna ma postać:

1. y' – notacja Langrange’a (czyt. *y prim*). Pochodne wyższych rzędów oznaczane są poprzez dodanie odpowiednio kolejnego apostrofu;
2. $\frac{dy}{dx}$ – notacja Leibniza (czyt. pochodna funkcji y po zmiennej x). Jeżeli funkcja zależy od kilku zmiennych, zamiast d stosuje się symbol pochodnej cząstkowej ∂ ;
3. $\dot{y}$ – notacja Newtona. Pochodne wyższych rzędów oznaczane są poprzez dodanie odpowiednio kolejnych kropek.

Pochodne wybranych funkcji:

$$(c)' = 0$$

$$(c \cdot x^n)' = c \cdot n \cdot x^{n-1}$$

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$(\cos x)' = -\sin x$$

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$(\operatorname{ctg} x)' = \frac{-1}{\sin^2 x}$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$(e^{c \cdot x})' = c \cdot e^{c \cdot x}$$

$$(c^x)' = c^x \cdot \ln c,$$

gdzie: c – stała wartość liczbowa.

Pochodne sumy, różnicy, iloczynu i ilorazu funkcji złożonej:

$$[f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x)$$

$$[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)} \right]' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$$

Wyznaczana zmienna zależna y opisana jest funkcją innych zmiennych niezależnych $y = f(a, b, \dots, z)$ mierzonych bezpośrednio za pomocą różnych przyrządów pomiarowych. Każdy przyrząd cechuje inna dokładność: $\Delta a, \Delta b, \dots, \Delta z$.

Niepewność bezwzględna:

$$\Delta y = \left| \frac{\partial y}{\partial a} \right| \cdot \Delta a + \left| \frac{\partial y}{\partial b} \right| \cdot \Delta b + \dots + \left| \frac{\partial y}{\partial z} \right| \cdot \Delta z,$$

gdzie: $\frac{\partial y}{\partial a}$ – pochodna funkcji y po zmiennej a .

Niepewność bezwzględna jest zawsze dodatnia i wyrażana jest w takich samych jednostkach jak zmienna zależna y . Z tego powodu, jednostka wynikająca z każdego iloczynu dwóch wyrazów musi być jednakowa i odpowiadać jednostce y . Fakt ten można wykorzystać do sprawdzenia poprawności wyznaczanych pochodnych.

Niepewność względna:

$$\delta = \frac{\Delta y}{y}$$

Jest to wielkość bezwymiarowa, opisuje jaką część wartości wyznaczanej wielkości y stanowi jej niepewność Δy .

Niepewność względna procentowa:

$$\delta_{\%} = \frac{\Delta y}{y} \cdot 100\%$$

Jest to niepewność względna, która z postaci ułamka dziesiętnego została przekształcona do postaci procentowej.

i \ n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	0,7071	0,7071	0,6872	0,6646	0,6431	0,6233	0,6052	0,5888	0,5739	0,5601
2		0	0,1677	0,2413	0,2806	0,3031	0,3164	0,3244	0,3291	0,3315
3				0	0,0875	0,1401	0,1743	0,1976	0,2141	0,2260
4						0	0,0564	0,0947	0,1224	0,1429
5								0	0,0399	0,0695
6										0
i \ n	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
1	0,5475	0,5359	0,5251	0,5150	0,5056	0,4968	0,4886	0,4808	0,4734	0,4643
2	0,3325	0,3325	0,3318	0,3306	0,3290	0,3273	0,3253	0,3232	0,3211	0,3185
3	0,2347	0,2412	0,2460	0,2495	0,2521	0,2540	0,2553	0,2561	0,2565	0,2578
4	0,1586	0,1707	0,1802	0,1878	0,1939	0,1988	0,2027	0,2059	0,2085	0,2199
5	0,0922	0,1099	0,1240	0,1353	0,1447	0,1524	0,1587	0,1641	0,1686	0,1736
6	0,0303	0,0539	0,0727	0,0880	0,1005	0,1109	0,1197	0,1271	0,1334	0,1399
7		0	0,0240	0,0433	0,0593	0,725	0,0837	0,0932	0,1013	0,1092
8				0	0,0196	0,0359	0,0496	0,0612	0,0711	0,0804
9						0	0,0130	0,0303	0,0422	0,0530
10								0	0,0140	0,0263
11										0
i \ n	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
1	0,4590	0,4542	0,4493	0,445	0,4407	0,4366	0,4328	0,4291	0,4254	0,422
2	0,3156	0,3126	0,3098	0,3069	0,3043	0,3018	0,2992	0,2968	0,2944	0,2921
3	0,2571	0,2563	0,2554	0,2543	0,2533	0,2522	0,251	0,2499	0,2487	0,2475
4	0,2131	0,2139	0,2145	0,2148	0,2151	0,2152	0,2151	0,215	0,2148	0,2145
5	0,1764	0,1787	0,1807	0,1822	0,1836	0,1848	0,1857	0,1864	0,187	0,1874
6	0,1443	0,148	0,1512	0,1539	0,1563	0,1584	0,1601	0,1616	0,163	0,1641
7	0,1150	0,1201	0,1245	0,1283	0,1316	0,1346	0,1372	0,1395	0,1415	0,1433
8	0,0878	0,0941	0,0997	0,1046	0,1089	0,1128	0,1162	0,1192	0,1219	0,1243
9	0,0618	0,0696	0,0764	0,0823	0,0876	0,0923	0,0965	0,1002	0,1036	0,1066
10	0,0368	0,0459	0,0539	0,061	0,0672	0,0728	0,0778	0,0822	0,0862	0,0899
11	0,0122	0,0228	0,0321	0,0403	0,0476	0,054	0,0598	0,065	0,0697	0,0739
12		0	0,0107	0,02	0,0284	0,0358	0,0424	0,0483	0,0537	0,0585
13					0,0094	0,0178	0,0253	0,032	0,0381	0,0435
14						0	0,0084	0,0159	0,0227	0,0289
15								0	0,0076	0,0144
16										0
i \ n	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41
1	0,4188	0,4156	0,4127	0,4096	0,4068	0,404	0,4015	0,3989	0,3964	0,394
2	0,2898	0,2876	0,2854	0,2834	0,2813	0,2794	0,2774	0,2755	0,2737	0,2719
3	0,2463	0,2451	0,2439	0,2427	0,2415	0,2403	0,2391	0,238	0,2368	0,2357
4	0,2141	0,2137	0,2132	0,2127	0,2121	0,2116	0,211	0,2104	0,2098	0,2091
5	0,1878	0,188	0,1882	0,1883	0,1883	0,1883	0,1881	0,188	0,1878	0,1876
6	0,1651	0,166	0,1667	0,1673	0,1678	0,1683	0,1686	0,1689	0,1691	0,1693
7	0,1449	0,1463	0,1475	0,1487	0,1496	0,1505	0,1513	0,152	0,1526	0,1531

n \ α	0,01	0,02	0,05	0,1
3	0,753	0,756	0,767	0,789
4	0,687	0,707	0,748	0,792
5	0,686	0,715	0,762	0,806
6	0,713	0,743	0,788	0,826
7	0,730	0,760	0,803	0,838
8	0,749	0,778	0,818	0,851
9	0,764	0,791	0,829	0,859
10	0,781	0,806	0,842	0,869
11	0,792	0,817	0,850	0,876
12	0,805	0,828	0,859	0,883
13	0,814	0,837	0,866	0,889
14	0,825	0,846	0,874	0,895
15	0,835	0,855	0,881	0,901
16	0,844	0,863	0,887	0,906
17	0,851	0,869	0,892	0,910
18	0,858	0,874	0,897	0,914
19	0,863	0,879	0,901	0,917
20	0,868	0,884	0,905	0,920
21	0,873	0,888	0,908	0,923
22	0,878	0,892	0,911	0,926
23	0,881	0,895	0,914	0,928
24	0,884	0,898	0,916	0,930
25	0,888	0,901	0,918	0,931
26	0,891	0,904	0,920	0,933
27	0,894	0,906	0,923	0,935
28	0,896	0,908	0,924	0,936
29	0,898	0,910	0,926	0,937
30	0,900	0,912	0,927	0,939
35	0,910	0,920	0,934	0,944
40	0,919	0,928	0,940	0,949
45	0,926	0,934	0,945	0,953
50	0,930	0,938	0,947	0,955
55	0,938	0,943	0,951	0,958
60	0,941	0,946	0,954	0,960
65	0,944	0,949	0,956	0,961
70	0,946	0,951	0,957	0,963
75	0,949	0,953	0,959	0,964
80	0,950	0,955	0,960	0,965
85	0,952	0,956	0,961	0,966
90	0,954	0,957	0,962	0,967
95	0,955	0,958	0,963	0,967

u	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0	0,50000	0,50399	0,50798	0,51197	0,51595	0,51994	0,52392	0,52790	0,53188	0,53586
0,1	0,53983	0,54380	0,54776	0,55172	0,55567	0,55962	0,56356	0,56749	0,57142	0,57535
0,2	0,57926	0,58317	0,58706	0,59095	0,59483	0,59871	0,60257	0,60642	0,61026	0,61409
0,3	0,61791	0,62172	0,62552	0,62930	0,63307	0,63683	0,64058	0,64431	0,64803	0,65173
0,4	0,65542	0,65910	0,66276	0,66640	0,67003	0,67364	0,67724	0,68082	0,68439	0,68793
0,5	0,69146	0,69497	0,69847	0,70194	0,70540	0,70884	0,71226	0,71566	0,71904	0,72240
0,6	0,72575	0,72907	0,73237	0,73565	0,73891	0,74215	0,74537	0,74857	0,75175	0,75490
0,7	0,75804	0,76115	0,76424	0,76730	0,77035	0,77337	0,77637	0,77935	0,78230	0,78524
0,8	0,78814	0,79103	0,79389	0,79673	0,79955	0,80234	0,80511	0,80785	0,81057	0,81327
0,9	0,81594	0,81859	0,82121	0,82381	0,82639	0,82894	0,83147	0,83398	0,83646	0,83891
1	0,84134	0,84375	0,84614	0,84849	0,85083	0,85314	0,85543	0,85769	0,85993	0,86214
1,1	0,86433	0,86650	0,86864	0,87076	0,87286	0,87493	0,87698	0,87900	0,88100	0,88298
1,2	0,88493	0,88686	0,88877	0,89065	0,89251	0,89435	0,89617	0,89796	0,89973	0,90147
1,3	0,90320	0,90490	0,90658	0,90824	0,90988	0,91149	0,91308	0,91466	0,91621	0,91774
1,4	0,91924	0,92073	0,92220	0,92364	0,92507	0,92647	0,92785	0,92922	0,93056	0,93189
1,5	0,93319	0,93448	0,93574	0,93699	0,93822	0,93943	0,94062	0,94179	0,94295	0,94408
1,6	0,94520	0,94630	0,94738	0,94845	0,94950	0,95053	0,95154	0,95254	0,95352	0,95449
1,7	0,94520	0,94630	0,94738	0,94845	0,94950	0,95053	0,95154	0,95254	0,95352	0,95449
1,8	0,95543	0,95637	0,95728	0,95818	0,95907	0,95994	0,96080	0,96164	0,96246	0,96327
1,9	0,96407	0,96485	0,96562	0,96638	0,96712	0,96784	0,96856	0,96926	0,96995	0,97062
2	0,97725	0,97778	0,97831	0,97882	0,97932	0,97982	0,98030	0,98077	0,98124	0,98169
2,1	0,98214	0,98257	0,98300	0,98341	0,98382	0,98422	0,98461	0,98500	0,98537	0,98574
2,2	0,98610	0,98645	0,98679	0,98713	0,98745	0,98778	0,98809	0,98840	0,98870	0,98899
2,3	0,98928	0,98956	0,98983	0,99010	0,99036	0,99061	0,99086	0,99111	0,99134	0,99158
2,4	0,99180	0,99202	0,99224	0,99245	0,99266	0,99286	0,99305	0,99324	0,99343	0,99361
2,5	0,99379	0,99396	0,99413	0,99430	0,99446	0,99461	0,99477	0,99492	0,99506	0,99520
2,6	0,99534	0,99547	0,99560	0,99573	0,99585	0,99598	0,99609	0,99621	0,99632	0,99643
2,7	0,99653	0,99664	0,99674	0,99683	0,99693	0,99702	0,99711	0,99720	0,99728	0,99736
2,8	0,99744	0,99752	0,99760	0,99767	0,99774	0,99781	0,99788	0,99795	0,99801	0,99807
2,9	0,99813	0,99819	0,99825	0,99831	0,99836	0,99841	0,99846	0,99851	0,99856	0,99861
3	0,99865	0,99869	0,99874	0,99878	0,99882	0,99886	0,99889	0,99893	0,99896	0,99900
3,1	0,99903	0,99906	0,99910	0,99913	0,99916	0,99918	0,99921	0,99924	0,99926	0,99929
3,2	0,99931	0,99934	0,99936	0,99938	0,99940	0,99942	0,99944	0,99946	0,99948	0,99950
3,3	0,99952	0,99953	0,99955	0,99957	0,99958	0,99960	0,99961	0,99962	0,99964	0,99965
3,4	0,99966	0,99968	0,99969	0,99970	0,99971	0,99972	0,99973	0,99974	0,99975	0,99976
3,5	0,99977	0,99978	0,99978	0,99979	0,99980	0,99981	0,99981	0,99982	0,99983	0,99983
3,6	0,99984	0,99985	0,99985	0,99986	0,99986	0,99987	0,99987	0,99988	0,99988	0,99989
3,7	0,99989	0,99990	0,99990	0,99990	0,99991	0,99991	0,99992	0,99992	0,99992	0,99992
3,8	0,99993	0,99993	0,99993	0,99994	0,99994	0,99994	0,99994	0,99995	0,99995	0,99995
3,9	0,99995	0,99995	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99997	0,99997

$k \backslash \lambda$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
0	0,9048	0,8187	0,7408	0,6703	0,6065	0,5488	0,4966	0,4493	0,4066	0,3679
1	0,0905	0,1637	0,2222	0,2681	0,3033	0,3293	0,3476	0,3595	0,3659	0,3679
2	0,0045	0,0164	0,0333	0,0536	0,0758	0,0988	0,1217	0,1438	0,1647	0,1839
3	0,0002	0,0011	0,0033	0,0072	0,0126	0,0198	0,0284	0,0383	0,0494	0,0613
4		0,0001	0,0003	0,0007	0,0016	0,003	0,005	0,0077	0,0111	0,0153
5				0,0001	0,0002	0,0004	0,0007	0,0012	0,002	0,0031
6							0,0001	0,0002	0,0003	0,0005
7										0,0001
8										
$k \backslash \lambda$	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2
0	0,3329	0,3012	0,2725	0,2466	0,2231	0,2019	0,1827	0,1653	0,1496	0,1353
1	0,3662	0,3614	0,3543	0,3452	0,3347	0,323	0,3106	0,2975	0,2842	0,2707
2	0,2014	0,2169	0,2303	0,2417	0,251	0,2584	0,264	0,2678	0,27	0,2707
3	0,0738	0,0867	0,0998	0,1128	0,1255	0,1378	0,1496	0,1607	0,171	0,1804
4	0,0203	0,026	0,0324	0,0395	0,0471	0,0551	0,0636	0,0723	0,0812	0,0902
5	0,0045	0,0062	0,0084	0,0111	0,0141	0,0176	0,0216	0,026	0,0309	0,0361
6	0,0008	0,0012	0,0018	0,0026	0,0035	0,0047	0,0061	0,0078	0,0098	0,012
7	0,0001	0,0002	0,0003	0,0005	0,0008	0,0011	0,0015	0,002	0,0027	0,0034
8			0,0001	0,0001	0,0001	0,0002	0,0003	0,0005	0,0006	0,0009
9							0,0001	0,0001	0,0001	0,0002
10										
$k \backslash \lambda$	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6	2,7	2,8	2,9	3
0	0,1225	0,1108	0,1003	0,0907	0,0821	0,0743	0,0672	0,0608	0,055	0,0498
1	0,2572	0,2438	0,2306	0,2177	0,2052	0,1931	0,1815	0,1703	0,1596	0,1494
2	0,27	0,2681	0,2652	0,2613	0,2565	0,251	0,245	0,2384	0,2314	0,224
3	0,189	0,1966	0,2033	0,209	0,2138	0,2176	0,2205	0,2225	0,2237	0,224
4	0,0992	0,1082	0,1169	0,1254	0,1336	0,1414	0,1488	0,1557	0,1622	0,168
5	0,0417	0,0476	0,0538	0,0602	0,0668	0,0735	0,0804	0,0872	0,094	0,1008
6	0,0146	0,0174	0,0206	0,0241	0,0278	0,0319	0,0362	0,0407	0,0455	0,0504
7	0,0044	0,0055	0,0068	0,0083	0,0099	0,0118	0,0139	0,0163	0,0188	0,0216
8	0,0011	0,0015	0,0019	0,0025	0,0031	0,0038	0,0047	0,0057	0,0068	0,0081
9	0,0003	0,0004	0,0005	0,0007	0,0009	0,0011	0,0014	0,0018	0,0022	0,0027
10	0,0001	0,0001	0,0001	0,0002	0,0002	0,0003	0,0004	0,0005	0,0006	0,0008
11						0,0001	0,0001	0,0001	0,0002	0,0002
12										0,0001

$k \backslash \lambda$	3,2	3,4	3,6	3,8	4	4,2	4,4	4,6	4,8	5
0	0,0408	0,0334	0,0273	0,0224	0,0183	0,015	0,0123	0,0101	0,0082	0,0067
1	0,1304	0,1135	0,0984	0,085	0,0733	0,063	0,054	0,0462	0,0395	0,0337
2	0,2087	0,1929	0,1771	0,1615	0,1465	0,1323	0,1188	0,1063	0,0948	0,0842
3	0,2226	0,2186	0,2125	0,2046	0,1954	0,1852	0,1743	0,1631	0,1517	0,1404
4	0,1781	0,1858	0,1912	0,1944	0,1954	0,1944	0,1917	0,1875	0,182	0,1755
5	0,114	0,1264	0,1377	0,1477	0,1563	0,1633	0,1687	0,1725	0,1747	0,1755
6	0,0608	0,0716	0,0826	0,0936	0,1042	0,1143	0,1237	0,1323	0,1398	0,1462
7	0,0278	0,0348	0,0425	0,0508	0,0595	0,0686	0,0778	0,0869	0,0959	0,1044
8	0,0111	0,0148	0,0191	0,0241	0,0298	0,036	0,0428	0,05	0,0575	0,0653
9	0,004	0,0056	0,0076	0,0102	0,0132	0,0168	0,0209	0,0255	0,0307	0,0363
10	0,0013	0,0019	0,0028	0,0039	0,0053	0,0071	0,0092	0,0118	0,0147	0,0181
11	0,0004	0,0006	0,0009	0,0013	0,0019	0,0027	0,0037	0,0049	0,0064	0,0082
12	0,0001	0,0002	0,0003	0,0004	0,0006	0,0009	0,0013	0,0019	0,0026	0,0034
13			0,0001	0,0001	0,0002	0,0003	0,0005	0,0007	0,0009	0,0013
14					0,0001	0,0001	0,0001	0,0002	0,0003	0,0005
15								0,0001	0,0001	0,0002
16										
$k \backslash \lambda$	5,5	6	6,5	7	7,5	8	8,5	9		
0	0,0041	0,0025	0,0015	0,0009	0,0006	0,0003	0,0002	0,0001		
1	0,0225	0,0149	0,0098	0,0064	0,0041	0,0027	0,0017	0,0011		
2	0,0618	0,0446	0,0318	0,0223	0,0156	0,0107	0,0074	0,005		
3	0,1133	0,0892	0,0688	0,0521	0,0389	0,0286	0,0208	0,015		
4	0,1558	0,1339	0,1118	0,0912	0,0729	0,0573	0,0443	0,0337		
5	0,1714	0,1606	0,1454	0,1277	0,1094	0,0916	0,0752	0,0607		
6	0,1571	0,1606	0,1575	0,149	0,1367	0,1221	0,1066	0,0911		
7	0,1234	0,1377	0,1462	0,149	0,1465	0,1396	0,1294	0,1171		
8	0,0849	0,1033	0,1188	0,1304	0,1373	0,1396	0,1375	0,1318		
9	0,0519	0,0688	0,0858	0,1014	0,1144	0,1241	0,1299	0,1318		
10	0,0285	0,0413	0,0558	0,071	0,0858	0,0993	0,1104	0,1186		
11	0,0143	0,0225	0,033	0,0452	0,0585	0,0722	0,0853	0,097		
12	0,0065	0,0113	0,0179	0,0263	0,0366	0,0481	0,0604	0,0728		
13	0,0028	0,0052	0,0089	0,0142	0,0211	0,0296	0,0395	0,0504		
14	0,0011	0,0022	0,0041	0,0071	0,0113	0,0169	0,024	0,0324		
15	0,0004	0,0009	0,0018	0,0033	0,0057	0,009	0,0136	0,0194		
16	0,0001	0,0003	0,0007	0,0014	0,0026	0,0045	0,0072	0,0109		
17			0,0003	0,0006	0,0012	0,0021	0,0036	0,0058		
18			0,0001	0,0002	0,0005	0,0009	0,0017	0,0029		
19				0,0001	0,0002	0,0004	0,0008	0,0014		
20					0,0001	0,0002	0,0003	0,0006		
21						0,0001	0,0001	0,0003		
22							0,0001	0,0001		

DF \ α	0,2	0,1	0,05	0,025	0,02	0,01	0,005
1	1,64	2,71	3,84	5,02	5,41	6,64	7,88
2	3,22	4,61	5,99	7,38	7,82	9,21	10,60
3	4,64	6,25	7,82	9,35	9,84	11,35	12,84
4	5,99	7,78	9,49	11,14	11,67	13,28	14,86
5	7,29	9,24	11,07	12,83	13,39	15,09	16,75
6	8,56	10,65	12,59	14,45	15,03	16,81	18,55
7	9,80	12,02	14,07	16,01	16,62	18,48	20,28
8	11,03	13,36	15,51	17,54	18,17	20,09	21,96
9	12,24	14,68	16,92	19,02	19,68	21,67	23,59
10	13,44	15,99	18,31	20,48	21,16	23,21	25,19
11	14,63	17,28	19,68	21,92	22,62	24,73	26,76
12	15,81	18,55	21,03	23,34	24,05	26,22	28,30
13	16,99	19,81	22,36	24,74	25,47	27,69	29,82
14	18,15	21,06	23,69	26,12	26,87	29,14	31,32
15	19,31	22,31	25,00	27,49	28,26	30,58	32,80
16	20,47	23,54	26,30	28,85	29,63	32,00	34,27
17	21,62	24,77	27,59	30,19	31,00	33,41	35,72
18	22,76	25,99	28,87	31,53	32,35	34,81	37,16
19	23,90	27,20	30,14	32,85	33,69	36,19	38,58
20	25,04	28,41	31,41	34,17	35,02	37,57	40,00
21	26,17	29,62	32,67	35,48	36,34	38,93	41,40
22	27,30	30,81	33,92	36,78	37,66	40,29	42,80
23	28,43	32,01	35,17	38,08	38,97	41,64	44,18
24	29,55	33,20	36,42	39,36	40,27	42,98	45,56
25	30,68	34,38	37,65	40,65	41,57	44,31	46,93
26	31,80	35,56	38,89	41,92	42,86	45,64	48,29
27	32,91	36,74	40,11	43,20	44,14	46,96	49,65
28	34,03	37,92	41,34	44,46	45,42	48,28	50,99
29	35,14	39,09	42,56	45,72	46,69	49,59	52,34
30	36,25	40,26	43,77	46,98	47,96	50,89	53,67
31	37,36	41,42	44,99	48,23	49,23	52,19	55,00
32	38,47	42,59	46,19	49,48	50,49	53,49	56,33
33	39,57	43,75	47,40	50,73	51,74	54,78	57,65
34	40,68	44,90	48,60	51,97	53,00	56,06	58,96
35	41,78	46,06	49,80	53,20	54,24	57,34	60,28

PROTOKÓŁ POMIAROWY

POLITECHNIKA LUBELSKA Wydział (nazwa) (kierunek studiów)	Laboratorium Podstaw Fizyki Prowadzący: (tytuł, imię, nazwisko)		
Nazwisko i imię:	Semestr (nr semestru)	Rok akademicki: (rok/rok)	Grupa: (nr grupy lab.)
1. 2.		Data wykonania ćwiczenia: (data dd.mm.rr)	Nr dośw.: (nr ćwiczenia)
Temat ćwiczenia: (temat ćwiczenia)			

1. Cel i zakres ćwiczenia

Cel i zakres wykonywanego doświadczenia, krótki opis ćwiczenia, główne wzory.

2. Dane pomiarowe

Tabele do zapisu danych pomiarowych. Każda wielkość musi mieć sprecyzowaną jednostkę miary. Dobrą praktyką jest przygotowanie dłuższych tabel niż podaje instrukcja na wypadek większej liczby pomiarów lub pomyłek. Należy pamiętać o numeracji oraz opisie tabel.

Tab. 1 Wyznaczanie przyspieszenia ziemskiego- dane pomiarowe

Lp.	d [m]	t_1 [s]	t [s]
1			
2			
3			
4			

3. Notatki

Miejsce do zapisu notatek w trakcie wykonywania ćwiczenia, np. spostrzeżeń, danych do wyznaczania niepewności pomiaru (klasa wykorzystywanych urządzeń, zakres), itp.

Protokół pomiarowy należy przygotować PRZED każdymi zajęciami (druk dwustronny). BRAK protokołu skutkuje WYKLUCZENIEM zespołu z zajęć laboratoryjnych! Uzupełniony i podpisany przez prowadzącego zajęcia protokół pomiarowy należy dołączyć do sprawozdania jako załącznik.

SPRAWOZDANIE

POLITECHNIKA LUBELSKA Wydział (nazwa) (kierunek studiów)		Laboratorium Podstaw Fizyki Prowadzący: (tytuł, imię, nazwisko)	
Nazwisko i imię:		Semestr (nr semestru)	Rok akademicki: (rok/rok)
1. 2.			Grupa: (nr grupy lab.)
			Data wykonania ćwiczenia: (data dd.mm.rr)
			Nr dośw.: (nr ćwiczenia)
Temat ćwiczenia: (temat ćwiczenia)		Data oddania sprawozdania: (data dd.mm.rr)	OCENA:

1. Cel i zakres ćwiczenia

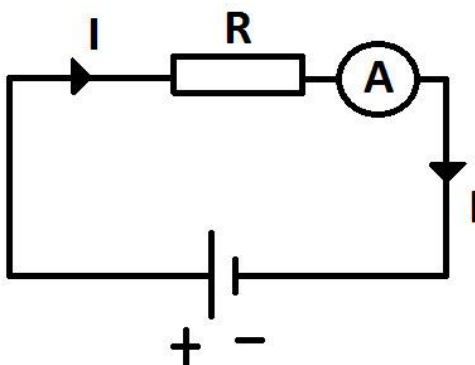
Cel i zakres wykonywanego doświadczenia, krótki opis ćwiczenia.

2. Opis badanego zjawiska fizycznego

Krótki opis zagadnienia (zjawisko fizyczne, układ elektryczny, metoda pomiarowa, itp.), którego dotyczy wykonywane ćwiczenie. Najważniejsze prawa lub wzory związane z badanym zjawiskiem fizycznym.

3. Opis stanowiska pomiarowego

Opis stanowiska pomiarowego (np. elementy stanowiska pomiarowego, wykorzystywane przyrządy pomiarowe, schemat obwodu elektrycznego, zdjęcie z podpisanymi elementami, itp.). Należy pamiętać o numeracji oraz podpisie rysunków.



Rys. 1 Schemat obwodu elektrycznego

4. Wyniki ćwiczenia

Tabele zawierające dane pomiarowe oraz obliczone wielkości. Każda wielkość musi mieć sprecyzowaną jednostkę miary. Pod tabelą należy przedstawić przykładowe obliczenia dla jednego z wierszy tabeli. Należy pamiętać o numeracji oraz opisie tabel. Jeśli jest to wymagane, wyniki pomiarów należy również przedstawić w postaci graficznej.

Tab. 1 Wyznaczanie przyspieszenia ziemskiego

Lp.	d [m]	t_1 [s]	t [s]
1			
2			
3			
4			

5. Ocena niepewności pomiaru

Obliczenia niepewności pomiaru wyznaczonej wielkości fizycznej w ćwiczeniu. Napisać jakie metody wyznaczania niepewności pomiaru wykorzystano. Obliczenia należy przedstawić w postaci tabelaryzowanej. Pod tabelą należy przedstawić przykładowe obliczenia dla jednego z wierszy tabeli. Przeprowadzić kontrolę jednostek miary aby upewnić się, że wyprowadzone wzory są poprawne.

6. Wnioski

Podsumowanie wykonanego ćwiczenia. Wnioski, przemyślenia, uwagi. Wymagana jest interpretacja wyników względem poznanej teorii dotyczącej zjawiska fizycznego/układu elektrycznego/metody pomiarowej będących przedmiotem ćwiczenia. Jeśli ćwiczenie na to pozwala, należy porównać otrzymany wynik z wartością rzeczywistą (wartość tablicowa) podaną w literaturze.

Sprawozdanie (druk dwustronny) wraz z załączonym na końcu protokołem pomiarowym należy oddać na początku kolejnych zajęć. Niezsyte kartki nie będą przyjmowane! W przypadku zastrzeżeń prowadzącego do sprawozdania, zespół zobowiązany jest dokonać niezbędnych korekt i dostarczyć poprawione sprawozdanie na następne zajęcia. Dopuszczalna jest jedna poprawa tego samego sprawozdania.